

Ondes gravitationnelles en théorie de la gravité massive

Theodor Misiakiewicz
Stage L3 Mathématiques & Physique de l'ENS Ulm
à AstroParticule et Cosmologie (APC), Paris VII
10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris
theodor.misiakiewicz@ens.fr

Résumé

Nous présentons une première approche au sujet très récent des ondes gravitationnelles en gravité massive. Nous commençons par reprendre la Relativité Générale (RG) avec les variables ADM avant d'y appliquer la procédure de Dirac d'analyse hamiltonienne des contraintes. Fort de ces nouveaux outils, nous dressons un rapide panorama des théories de la gravité massive et des difficultés à construire une théorie cohérente (discontinuité vDVZ, fantôme de Boulware-Deser...). Enfin, après avoir rappelé quelques résultats classiques sur les ondes gravitationnelles en RG, nous discutons de quelques corrections phénoménologiques de la gravité massive et nous développons l'exemple des systèmes binaires compacts spiralés.

Table des matières

1	Introduction	4
I	Formulation hamiltonienne de la RG et procédure de Dirac	6
2	Rappels de relativité générale	6
2.1	Équations d'Einstein	6
2.2	Equations linéarisées de la RG	7
2.3	Action d'Hilbert-Einstein	8
3	Procédure de Dirac	9
3.1	Contraintes primaires et secondaires	10
3.1.1	Lagrangien et contraintes primaires	10
3.1.2	Hamiltonien canonique et principe de moindre action	10
3.1.3	Contraintes secondaires	12
3.1.4	Hamiltonien total	13
3.2	Contraintes de première et de deuxième classe	13
3.2.1	Contraintes de première classe et générateur des transformations de jauge	13
3.2.2	Crochets de Dirac et élimination des contraintes de seconde classe	14
3.3	Fixation de la jauge et degrés de liberté	15
3.4	Exemple	16
3.5	Extension aux théories des champs	17
4	Analyse hamiltonienne de la RG	18
4.1	Formalisme ADM et Hamiltonien de la RG	18
4.1.1	Feuilletage de l'espace temps	18
4.1.2	L'action d'Einstein-Hilbert en variables ADM	20
4.1.3	Passage en formulation hamiltonienne	21
4.2	Contraintes et degrés de liberté	21
II	Théories de la gravité massive	23
5	Le graviton massif libre	23
5.1	Motivations phénoménologiques	23
5.2	Action de Fierz-Pauli	24
5.3	Analyse hamiltonienne de l'action de Fierz-Pauli	25
5.3.1	Cas $\alpha = 1$	25
5.3.2	Cas $\alpha \neq 1$	25
5.4	Discontinuité vDVZ	26
6	Complétions non-linéaires	28
6.1	Action non-linéaire de la gravité massive	28
6.2	Fantôme de Boulware-Deser	29
III	Ondes gravitationnelles en gravité massive	31

7	Rappels de quelques résultats classiques de RG	31
7.1	Jauge transverse sans trace	31
7.2	Coordonnées de Fermi	33
7.3	Détection des ondes gravitationnelles : polarisations rectilignes + et \times	34
8	Aspects phénoménologiques de la gravité massive	35
9	Cas d'un système binaire compact spiralé	37
9.1	Action dans un espace courbe	37
9.2	Relation de dispersion dans un espace FLRW	38
9.3	Retard dans la propagation de l'onde	39
9.4	Modification de la phase des ondes gravitationnelles	40
10	Perspectives	43
A	Algèbre des contraintes en RG	45
B	Calculs des contraintes en gravité massive	48

1 Introduction

Ce mémoire a été écrit suite à un stage réalisé au laboratoire d’AstroParticule et Cosmologie (APC, Paris VII) sous la direction de Danièle Steer dans le cadre de la double L3 Mathématiques et Physique de l’ENS Ulm. Ce stage s’est déroulé en deux temps : une préparation tout au long du second semestre de la Licence 3 suivi d’un mois au laboratoire d’APC entre Juin et Juillet. Il a consisté en une première partie bibliographique (découverte du sujet de la gravité massive, familiarisation avec les ondes gravitationnelles) et une deuxième partie plus libre (recherche d’articles, tentatives de calculs, compréhension de certaines équations...) sur les ondes gravitationnelles en gravité massive, domaine de recherche avec encore très peu de résultats.

La relativité générale a multiplié depuis bientôt un siècle les succès expérimentaux et est maintenant largement acceptée comme la théorie correcte de la gravitation à basse énergie et à distance macroscopique. Cependant, l’observation des supernovae lointaines dans les années 90 a montré une accélération récente de l’expansion de l’Univers [1]. Si la RG est correcte, il doit alors exister une énergie sombre de densité $\rho \sim 10^{-29}$ g/cm³ et de nature encore inconnue. La manière la plus simple de rendre compte de ces observations est d’ajouter une constante Λ dans l’action d’Hilbert-Einstein, la fameuse *constante cosmologique*, qui aboutit à une densité d’énergie $\rho \sim M_P^2 \Lambda$. Une autre manière consiste à dire que peut-être la RG est fautive et qu’au lieu d’introduire une hypothétique énergie sombre, il faut chercher à modifier la théorie à grande distance.

L’autre motivation à chercher des théories alternatives, et qui explique que de nombreux chercheurs s’y soient attelés bien avant l’observation des supernovae, est que la RG a été développée par Einstein avant le développement des théories des champs dans les années 40 et 50, en partant de considérations purement géométriques (le principe d’équivalence et l’invariance générale par difféomorphisme). Dans cette approche moderne beaucoup plus générale, où les degrés de liberté sont propagés par des particules classifiées par leur spin [2], la RG décrit l’unique théorie non triviale d’une particule sans masse de spin 2, le graviton. *A contrario*, on peut montrer qu’il existe une infinité de champs satisfaisants le principe d’équivalence et l’invariance par difféomorphisme. De nombreux physiciens ont donc cherché à voir ce qui se passe lorsqu’on modifie légèrement cette théorie, et si, sans l’intuition d’Einstein, l’étude des théories des champs aurait également abouti à la RG, à l’image des chercheurs vénusiens de Feynman [3].

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons aux théories de la gravité massive (voir [4] et [5]), dont l’idée est de donner une masse au graviton, la particule de spin 2 qui véhicule l’interaction gravitationnelle. Après avoir été abandonnées pendant plusieurs décennies, celles-ci ont eu un regain de popularité dans les années 2000 avec le développement des théories branaires (par exemple le modèle DGP, voir [4]) présentant des caractéristiques communes avec les gravitons massifs (voir les modes Kaluza-Klein dans la section 5.1) et la résolution de plusieurs obstacles théoriques.

La manière la plus simple de construire une telle théorie est d’ajouter un terme de masse à l’action d’Hilbert-Einstein de manière à retrouver la RG lorsque $m_g \rightarrow 0$. Ainsi la théorie d’un graviton libre, sans auto-interactions, a été proposée dès 1939 par Fierz et Pauli [6] qui ont montré qu’elle est essentiellement unique, mais souffre d’une pathologie appelée la *discontinuité vDVZ* [7] : on ne retrouve pas la RG lorsqu’on prend la limite de masse nulle de la théorie. Rajouter un terme de masse brise en effet l’invariance de jauge de la RG : le graviton massif propage alors 3 degrés de liberté supplémentaires aux 2 de la RG dont l’un se couple à la matière et ne disparaît pas lorsque $m_g \rightarrow 0$. Si la théorie linéaire est exacte, des observations simples dans le système solaire suffisent à invalider la gravité massive. Néanmoins, comme le fit remarquer Vainshtein [8], la théorie de Fierz-Pauli n’est que le point de départ d’une théorie complètement non-linéaire. Il montra que les non-linéarités sont dominantes pour des distances inférieures à un certain rayon r_V , le *rayon de Vainshtein*, ce qui ouvre la possibilité que les effets non-linéaires compensent la discontinuité : c’est le *mécanisme de Vainshtein* [9]. Une théorie de la gravité massive doit donc être nécessairement non-linéaire. Cependant Boulware et Deser [10] montrèrent rapidement que les complétions non-linéaires présentaient un *fantôme* avec un Hamiltonien non borné inférieurement et il fut longtemps cru que cette instabilité était inévitable. Ce

n'est que très récemment, avec l'étude plus approfondie du mécanisme de Vainshtein et la construction d'actions sans fantôme (modèle dRGT [11]), que des théories satisfaisantes de la gravité massive ont vu le jour.

Les développements théoriques récents ont ouvert la possibilité de tester la gravité massive comme une alternative sérieuse et cohérente à la RG. Ainsi ces dernières années s'est développée toute une littérature cherchant à contraindre la masse du graviton par des considérations phénoménologiques indépendantes d'une action particulière. Par exemple, en se basant sur le potentiel de type Yukawa $\exp(-m_g r)/r$, plusieurs articles ont proposé une majoration de la masse du graviton à partir d'observations du système solaire $m_g < 10^{-22}$ eV [12], encore très loin des valeurs utilisées pour rendre compte de l'accélération de l'expansion de l'Univers, de l'ordre de la constante de Hubble $H_0 \sim 10^{-33}$ eV. Mais pour le moment, très peu de travaux se basant sur une théorie complète de la gravité massive ont été menés.

Nous allons nous intéresser ici plus particulièrement aux ondes gravitationnelles qui sont devenues un domaine de recherche très actif ces dernières années avec la construction des premiers interféromètres LIGO et VIRGO [13]. Ces ondes en gravité massive sont modifiées de deux manières par rapport à la RG : elles possèdent trois polarisations supplémentaires (les 3 degrés de liberté additionnels aux 2 de la RG) et ont une vitesse inférieure à celle de la lumière. Nous développerons plus particulièrement le cas des systèmes compacts binaires spiralés qui présentent plusieurs avantages : ils ont été étudiés très précisément en RG, ce qui rend une déviation du cadre théorique plus facile à mesurer, et ce sont des sources d'ondes gravitationnelles très "propres" dépendant d'un petit nombre de paramètres. De plus le nombre de cycles et la forme très particulière à fréquence croissante rendent la mesure très sensible par *matched filtering* [14]. Ces systèmes mettent également en jeu la zone proche et la zone radiative ce qui permet de chercher à la fois des déviations dans ces deux régimes. Cette étude montrera que, lorsqu'on prend en compte la relation de dispersion modifiée du graviton, on aboutit à un terme correctif supplémentaire dans la phase de l'onde, ce qui nous permettra de proposer la majoration théorique de $m_g < 10^{-26}$ eV avec le futur (potentiel) interféromètre LISA.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante : dans une première partie, nous rappellerons quelques éléments de RG et des équations linéarisées d'Einstein ainsi que certains résultats des théories des champs, avant de construire l'action d'Einstein-Hilbert. Nous présenterons ensuite une méthode générale d'analyse des systèmes de jauge, appelée procédure de Dirac, et l'appliquerons à l'analyse hamiltonienne de la RG. La deuxième partie sera consacrée à la présentation des théories de la gravité massive où nous insisterons tout particulièrement sur les pathologies rencontrées. Après avoir étudié l'Hamiltonien de la théorie du graviton massif libre et présenté la discontinuité vDVZ, nous nous pencherons sur les complétions non-linéaires et nous vérifierons, toujours grâce à la procédure de Dirac, la présence du fantôme de Boulware-Deser dans un cas particulier. La troisième partie enfin traitera des ondes gravitationnelles où nous commencerons par un rappel de RG avant de discuter de la phénoménologie de la gravité massive. La dernière section portera sur l'exemple des systèmes binaires spiralés : après avoir construit une action en espace courbe et déduit la relation de dispersion du graviton dans un espace FLRW, nous suivrons l'article de C. M. Will [15] afin d'aboutir à une expression des ondes gravitationnelles modifiées.

Notations et conventions : Dans tout ce mémoire, nous nous placerons par simplicité en dimension 4. Cependant la plupart des résultats sont directement généralisables en dimension quelconque. La signature de la métrique plate sera prise $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$. Nous suivrons la convention de sommation des indices d'Einstein. Selon les notations habituelles, les indices grecs serviront à indexer toutes les coordonnées (*i.e.* $\mu = 0, \dots, 3$) tandis que les indices latins seulement les coordonnées spatiales (*i.e.* $i = 1, 2, 3$). Les tenseurs seront symétrisés selon 2 indices en les mettant entre parenthèses $T_{(\mu\nu)} = (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})/2$. Enfin nous noterons la masse réduite de Planck par $M_P = 1/(8\pi G)^{1/2} \approx 2,43 \times 10^{18}$ GeV. Par souci de concision, nous n'avons pas inclu tous les détails des calculs qui ont été réalisés lors de ce stage. Lorsqu'un résultat est repris directement d'un article, une référence est donnée.

Première partie

Formulation hamiltonienne de la RG et procédure de Dirac

Dans cette partie, nous allons introduire une méthode développée par Dirac dans les années 1960 pour l'étude des systèmes de jauge. Celle-ci permet de trouver de manière systématique les contraintes, des générateurs des symétries de jauge, les équations du mouvement générales ainsi que le nombre de degrés de liberté. Nous commencerons par quelques rapides rappels de RG, avant d'en présenter la formulation en théorie classique des champs (par opposition à la théorie quantique des champs) avec l'action d'Hilbert-Einstein. Puis nous décrirons en détail la procédure de Dirac et nous l'appliquerons à l'analyse hamiltonienne de la RG.

2 Rappels de relativité générale

2.1 Équations d'Einstein

Une des grandes intuitions qui a permis à Einstein de passer de la relativité restreinte à la RG a été de considérer la métrique de l'espace-temps comme étant elle-même dynamique et couplée à la matière. En partant du principe d'équivalence faible (en tout point de l'espace-temps, on peut choisir un référentiel localement inertiel, *i.e.* où la métrique a localement la forme de la métrique plate) et de l'invariance générale par changement de coordonnées, il aboutit à ses fameuses équations, dites *équations d'Einstein* (voir [16] pour un livre complet sur le sujet).

L'espace-temps est décrit dans cette théorie comme une variété à 4 dimensions, munie en tout point d'un *tenseur métrique* symétrique tel que dans un système de coordonnées arbitraire $\{x^\mu\}$, l'intervalle infinitésimal s'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

À partir du tenseur métrique, on construit les *symboles de Christoffel* (qui caractérisent naturellement une connexion affine, *i.e.* comment les vecteurs sont transportés parallèlement à eux-mêmes le long d'un chemin dans une variété différentielle) :

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} [\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}]. \quad (2.2)$$

Ceux-ci permettent de définir la *dérivée covariante* qui est la généralisation à une variété différentielle (après avoir défini le transport parallèle) de la dérivée usuelle. Pour un tenseur quelconque $T^{\mu\dots}_{\lambda\dots}$, on peut montrer l'expression [16] :

$$\nabla_\nu T^{\mu\dots}_{\lambda\dots} = \partial_\nu T^{\mu\dots}_{\lambda\dots} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} T^{\rho\dots}_{\lambda\dots} + \dots - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} T^{\mu\dots}_{\rho\dots} - \dots \quad (2.3)$$

En particulier, on a $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$.

Le *tenseur de Riemann* (ou encore *tenseur de courbure*), le *tenseur de Ricci* et le *scalair de Ricci* sont donnés respectivement par :

$$R^\lambda_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\lambda_{\nu\rho}, \quad R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Les équations d'Einstein s'écrivent alors de manière condensée :

$$\boxed{G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}} \quad (2.5)$$

où $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}/2$ est le *tenseur d'Einstein*, $T^{\mu\nu}$ le *tenseur d'énergie-impulsion* de la matière, $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ la constante newtonienne de la gravitation et $c = 3.00 \times 10^8 m.s^{-1}$

la vitesse de la lumière. La constante cosmologique Λ ne sera prise en compte que dans la dernière sous-partie de ce mémoire, lorsque nous considérerons la propagation d'un graviton dans un espace courbe.

On rappelle les *identités de Bianchi* qui jouent un rôle important en RG

$$\nabla_\lambda R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho R^\mu{}_{\nu\sigma\lambda} + \nabla_\sigma R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = 0 \quad (2.6)$$

Elles impliquent le résultat important suivant : la divergence du tenseur d'Einstein est nulle $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$. En utilisant ce résultat dans (2.5), on déduit la conservation du tenseur d'énergie-impulsion $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

2.2 Equations linéarisées de la RG

Une des propriétés des équations d'Einstein (2.5), qui rend leur résolution particulièrement difficile, est qu'elles sont fortement non-linéaires. Une première méthode pour comprendre ce qui se passe est de considérer perturbativement la présence de matière par rapport à un espace de fond plat :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

qui est le choix le plus pertinent pour la plupart des phénomènes astrophysiques en champs faibles (*i.e.* $h_{\mu\nu} \ll 1$), comme les ondes gravitationnelles.

En introduisant les variables auxiliaires

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.8)$$

on peut écrire les équations d'Einstein au premier ordre, appelées les *équations linéarisées de la RG*, sous la forme :

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - 2\partial_\rho \partial^{(\mu} \bar{h}^{\nu)\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

où $\square = \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma \partial_\rho$ est le d'Alembertien en métrique plate.

La théorie des champs nous dit que ces équations représentent en fait les équations d'un champ $\bar{h}^{\mu\nu}$ sans auto-interactions de masse nulle et de spin 2, le graviton. On remarque par ailleurs que le membre de gauche est invariant sous la transformation de jauge :

$$\bar{h}^{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}^{\mu\nu} + 2\partial^{(\mu} \xi^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda \quad (2.10)$$

où le champ de vecteur ξ^μ représente un changement de coordonnées infinitésimal $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$ ¹. Cette invariance de jauge correspond à l'invariance de la RG sous les changements quelconques de coordonnées, appelée *covariance générale* : (2.10) est la linéarisation de ces difféomorphismes. On peut alors fixer la jauge, ce qui correspond à choisir un système de coordonnées (voir la section 3.3), tel que les équations aient une forme plus simple. Dans la *jauge harmonique* (encore appelée *jauge de Lorentz*, ou *jauge de De Donder*) $\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ ², on a

$$\boxed{\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}} \quad (2.14)$$

qui est l'équation de propagation d'une onde de célérité c .

1. Sous l'effet du difféomorphisme $x'^\mu(x^\mu)$, on a la métrique qui se transforme suivant :

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} g^{\rho\sigma}(x) \quad (2.11)$$

Ensuite, en prenant comme difféomorphisme $x'^\mu \rightarrow x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu$ et en négligeant les termes $\mathcal{O}(h\partial\xi)$, on obtient la transformation :

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h'^{\mu\nu}(x') = h^{\mu\nu} + 2\partial^{(\mu} \xi^{\nu)} \quad (2.12)$$

qu'on injecte dans $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ pour retrouver la transformation de jauge (2.10).

2. Ce qui revient à faire un changement de coordonnées $x'^\mu \rightarrow x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu$ avec

$$\square \xi^\mu = -\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} \quad (2.13)$$

2.3 Action d'Hilbert-Einstein

Une approche alternative à celle géométrique d'Einstein est de partir du *principe de moindre action*, ce qui permet de placer la RG dans un cadre conceptuel plus large, celui des théories des champs, dans lequel sont étudiées les théories de la gravité massive. Nous commençons par quelques rappels sur le formalisme lagrangien.

En mécanique classique, les équations du mouvement entre les instants t_1 et t_2 d'une particule unique de coordonnées $q^i(t)$ indépendantes, peuvent s'obtenir en utilisant le *principe de moindre action* : la trajectoire de la particule est un extremum d'une fonctionnelle $\mathcal{S} [q^i, \dot{q}^i]$ appelée *action* :

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i) \quad (2.15)$$

où $L(q^i, \dot{q}^i)$, appelé le *Lagrangien*, est égale pour une particule ponctuelle soumise à des forces conservatives à $L = T - V$ avec T l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle. En imposant que $q^i(t)$ soit un point critique de cette action, *i.e.* que \mathcal{S} soit stationnaire pour des variations faibles $\delta q^i(t)$ de la trajectoire, avec $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, on trouve les *équations d'Euler-Lagrange* :

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0 \quad (2.16)$$

Le même principe s'applique aux théories des champs où $q^i(t)$ est remplacé par un ensemble de champs $\Phi^a(x^\mu)$. Le Lagrangien s'écrit alors comme l'intégrale sur tout l'espace d'une densité lagrangienne \mathcal{L} , qui est une fonctionnelle des champs Φ^a et de leurs dérivées spatio-temporelles $\partial_\mu \Phi^a$:

$$\mathcal{S} = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi^a, \partial_\mu \Phi^a) \quad (2.17)$$

Enfin, la RG est une théorie dans un espace courbe et il faut remplacer les dérivées partielles par des dérivées covariantes. Par ailleurs, comme d^4x est alors une densité, on note que \mathcal{L} n'est plus un scalaire. On réécrit $\mathcal{L} = \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}}$ où $\hat{\mathcal{L}}$ est bien un scalaire et $g = \det(g^{\mu\nu})$.

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} d^4x \hat{\mathcal{L}}(\Phi^a, \nabla_\mu \Phi^a) \quad (2.18)$$

Lorsque la métrique est non dynamique, les équations d'Euler-Lagrange associées sont données par³ :

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \Phi^a} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \nabla_\mu \Phi^a} \right) = 0 \quad (2.20)$$

On peut maintenant se tourner vers la construction d'un tel Lagrangien pour la RG, où les champs dynamiques Φ^a sont la métrique elle-même $g^{\mu\nu}$. Comme d'après le principe d'équivalence faible, on peut trouver un référentiel où la métrique est la métrique plate avec ses dérivées premières nulles, tout scalaire non trivial devra donc comporter au moins des dérivées secondes. On peut montrer alors que le seul scalaire non nul comportant des dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 est le scalaire de Ricci

3. En réalité, pour obtenir les équations d'Euler-Lagrange, on utilise le théorème de Stokes :

$$\int_\Sigma \nabla_\mu A^\mu \sqrt{|g|} d^4x = \int_{\partial\Sigma} n_\mu A^\mu \sqrt{|\gamma|} d^3x \quad (2.19)$$

qui laisse un terme supplémentaire surfacique lorsque l'on fait une intégration par partie. Dans ce mémoire on fixera toujours ce terme à zéro sans se soucier d'avantage des problèmes associés.

[16]. Ainsi le choix le plus simple du Lagrangien dans le vide (à un facteur globale près), et proposé par Hilbert en 1916, est :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \int \sqrt{-g} R d^4x} \quad (2.21)$$

Et en effet, on montre que c'est bien la forme correcte du Lagrangien. Les équations du mouvement de la métrique sont obtenues en étudiant le comportement de \mathcal{S}_H sous des faibles variations de $g^{\mu\nu}$ (l'action n'étant pas écrite sous la forme (2.18), on ne peut pas utiliser les équations d'Euler-Lagrange). Après un calcul long mais classique, on obtient

$$\delta\mathcal{S}_H = \int \delta(\sqrt{-g}R) d^4x = \int d^4x \left(\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} R + \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.22)$$

et en imposant que la variation soit stationnaire, on retrouve bien les équations d'Einstein dans le vide.

L'action totale en présence de matière, appelée *action d'Einstein-Hilbert*, est donnée finalement par :

$$\boxed{\mathcal{S}_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \mathcal{S}_H + S_M} \quad (2.23)$$

où S_M est l'action de la matière à partir duquel on définit le tenseur d'énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \hat{\mathcal{L}}_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.24)$$

3 Procédure de Dirac

Les équations d'Einstein (2.5) peuvent être vues comme un ensemble de 10 équations différentielles de second ordre décrivant l'évolution des 10 composantes indépendantes du tenseur métrique $g^{\mu\nu}$. Les 4 contraintes $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ permettent d'éliminer 4 degrés de liberté. Il en reste donc 6, or on va voir que seuls 2 degrés de liberté sont physiquement pertinents. Les 4 autres correspondent au fait que les équations sont indépendantes du système de coordonnées et peuvent être représentés par un changement quelconque de référentiel $x^{\mu'}$ (x^μ). On peut donc fixer arbitrairement le système de coordonnées sans changer les observables physiques pertinentes, comme on l'a fait en (2.14). La RG est invariante sous l'action du groupe des difféomorphismes : c'est une théorie de jauge.

Nous souhaitons dans la suite de ce mémoire étudier en détail de telles théories. Pour cela, nous allons utiliser le formalisme hamiltonien, qui joue un rôle centrale dans de nombreux domaines de physique, notamment en mécanique quantique. Cependant l'application directe du formalisme classique dans un système ayant une invariance de jauge aboutit le plus souvent à des équations du mouvement fausses. La différence est en fait due aux symétries particulières de ces théories. Les observables physiques importantes étant indépendantes de la jauge (du système de coordonnées), on peut changer de référentiel au fur et à mesure du mouvement, et donc à conditions initiales fixées dans un référentiel particulier, on ne peut espérer que les équations du mouvement déterminent complètement les variables dynamiques. C'est en fait une propriété caractéristique des théories de jauge que leurs équations du mouvement contiennent des fonctions arbitraires du temps.

Nous allons dans cette section présenter une procédure systématique développée par Dirac pour l'étude de tels systèmes, en s'appuyant sur la présentation de M. Henneaux et C. Teitelboim [17] (voir [18] pour une présentation plus moderne). Nous restreindrons notre discussion avec plusieurs hypothèses, en mentionnant qu'une étude en toute généralité est possible. Elles seront énumérées au fur et à mesure et sont vérifiées par tous les systèmes étudiés dans ce mémoire. Pour cette présentation, nous partirons du Lagrangien avant de passer au formalisme hamiltonien, car c'est le cas pratique que

nous allons rencontrer, et choisissons par souci de clarté l'étude d'un système classique $L(q^i, \dot{q}^i, n = 1, \dots, N)$, avant de passer à la toute fin aux théories des champs.

Cette partie technique, dont les détails ne sont pas essentiels à la suite de ce mémoire, pourra être occultée en première lecture. L'exemple détaillé dans le paragraphe 3.4 illustre succinctement les étapes de la procédure de Dirac et suffit amplement aux systèmes étudiés par la suite.

3.1 Contraintes primaires et secondaires

3.1.1 Lagrangien et contraintes primaires

Les équations d'Euler-Lagrange (2.16) peuvent se réécrire en faisant apparaître \ddot{q}^n :

$$\ddot{q}^m \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^m \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Les q^n sont donc solutions d'un ensemble d'équations différentielles du second ordre qui sont indépendantes à la condition que

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^m} \right) = \det \left(\frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}^n} \right) \neq 0 \quad (3.2)$$

où on a posé $p_m = \partial L / \partial \dot{q}^m$ les moments conjugués qui permettent le passage au formalisme hamiltonien.

La condition (3.2) signifie que l'on peut inverser les moments conjugués p_n en fonction des vitesses \dot{q}^n : les vitesses et les positions à un instant initial déterminent alors complètement les équations du mouvement. Les systèmes qui nous intéressent (possédant des symétries de jauge) correspondent au cas où cette condition n'est pas vérifiée. Le déterminant est alors nul et les moments ne sont plus indépendants. On suppose que le rang $N - M$ de la matrice $\partial p_m / \partial \dot{q}^n$ est constant dans l'espace (q^n, \dot{q}^n) , il existe alors M relations algébriques indépendantes

$$\boxed{\Phi_m(p_n, q^n) = 0, \quad m = 1, \dots, M,} \quad (3.3)$$

qui relie les variables canoniques. Elles sont appelées *contraintes primaires*, pour souligner qu'elles sont indépendantes des équations du mouvement.

Géométriquement, ces contraintes définissent une sous-variété Σ lisse de l'espace des phases (p, q) de dimension $2N - M$, la *surface des contraintes primaires*. L'inverse de l'image d'un point (p_n, q^n) de Σ de dimension $2N - M$ n'est pas unique et forme une sous-variété de dimension M dans l'espace (q, \dot{q}) . Pour retrouver une correspondance biunivoque, il faut introduire au moins M paramètres supplémentaires pour préciser les coordonnées de \dot{q}^n dans la sous-variété inverse. Nous allons voir que ces paramètres apparaissent sous la forme de multiplicateurs de Lagrange imposant les contraintes primaires et rajoutés à l'Hamiltonien canonique.

3.1.2 Hamiltonien canonique et principe de moindre action

Nous allons commencer par démontrer les deux propriétés utiles suivantes :

Propriété 1 *Si une fonction lisse G s'annule sur la surface Σ , alors on a $G = g^m \Phi_m$ avec g^m des fonctions lisses.*

Dém : D'après la condition d'indépendance des contraintes primaires dans tout l'espace (q, \dot{q}) , on peut trouver un système de coordonnées (x'_m, x_a) tel qu'il existe un voisinage V ouvert de Σ dans l'espace (p, q) où $x'_m \equiv \Phi_m$. On a dans ce système de coordonnées $G(0, x_a) = 0$ et

$$G(y_m, x_a) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(ty_m, x_a) dt = y_m \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x'_m} G(ty_m, x_a) dt = \Phi_m g^m \quad (3.4)$$

Pour étendre la propriété sur tout l'espace des phases (p, q) , il suffit de remarquer qu'en dehors de Σ au moins une des fonctions Φ_m est non nulle. Le recollement se fait en considérant une partition de l'unité avec comme ouverts V et U tel que $U \cap \Sigma = \emptyset$ et ${}^cV \subset U$. \square

Propriété 2 Si (λ_n, μ^n) , des fonctions de l'espace des phases, vérifient $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$ pour tout $(\delta q^n, \delta p_n)$ de l'espace tangent à Σ , alors il existe des fonctions u^m tel que sur la surface de contrainte

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n}, \quad \mu^n = u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n}. \quad (3.5)$$

Dém : La sous-variété des contraintes et donc les espaces tangents sont de dimension $2N - M$ et les $(\delta q^n, \delta p_n)$ décrivent un espace vectoriel de dimension $2N - M$. (λ_n, μ^n) est donc solution d'un système linéaire de M égalités indépendantes $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$. Or les M gradients $(\partial \Phi_m / \partial q^n, \partial \Phi_m / \partial p_n)$ sont linéairement indépendants (par indépendance des Φ_m) et vérifient $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$: ils forment une base de l'espace des solutions. Les u^m sont alors les coordonnées de (λ_n, μ^n) dans cet espace. \square

On introduit ensuite l'Hamiltonien canonique H_c tel que défini habituellement :

$$H_c = \dot{q}^n p_n - L \quad (3.6)$$

H_c est obtenue à partir du Lagrangien par transformée de Legendre, transformée qui a la propriété remarquable de donner l'Hamiltonien sous la forme d'une fonction uniquement de (p_n, q^n) , malgré l'absence de correspondance biunivoque avec les (q^i, \dot{q}^i) (regarder les variations pour s'en convaincre). Comme on a vu en 3.1.1, l'Hamiltonien n'est pas uniquement déterminée par (3.6) car les (p, q) doivent vérifier (3.33) : il n'est bien déterminé que sur la surface des contraintes et peut être étendu arbitrairement à tout l'espace des phases sous la forme $H_c + b^m(p, q)\Phi_m$ d'après la propriété 1. En écrivant les variations des coordonnées de (3.6), on obtient :

$$\left(\frac{\partial H_c}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n} \right) \delta q^n + \left(\frac{\partial H_c}{\partial p_n} - \dot{q}^n \right) \delta p_n = 0 \quad (3.7)$$

d'où on tire d'après la propriété 2 qu'il existe des u^m tels que

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H_c}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n}, \quad - \left(\frac{\partial L}{\partial q^n} \right)_{\dot{q}} = \left(\frac{\partial H_c}{\partial q^n} \right)_p + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n}. \quad (3.8)$$

La première relation permet d'exprimer \dot{q}^n en fonction des $(p, q) \in \Sigma$ et des paramètres supplémentaires u^m qui peuvent donc être vus comme les coordonnées de (q^n, \dot{q}^n) sur la surface inverse de p_n . Des relations (3.8), on peut définir une nouvelle transformation de Legendre, cette fois-ci de l'espace (q, \dot{q}) dans l'espace complété $\{(q, p, u) | \Phi_m(q, p) = 0\}$:

$$q^n = q^n, \quad p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}(q, \dot{q}), \quad u^m = u^m(q, \dot{q}) \quad (3.9)$$

qui est facilement inversible en partant de (3.8). On en déduit les équations hamiltoniennes du mouvement, équivalentes aux équations lagrangiennes,

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H_c}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = - \frac{\partial H_c}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n}, \quad \Phi_m(q, p) = 0. \quad (3.10)$$

qui peuvent être retrouvées à partir du principe variationnel

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H_c - u^m \Phi_m) = 0 \quad (3.11)$$

pour des variations arbitraires δq^n , δp_n et δu^m , vérifiant seulement $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Les u^m apparaissent bien comme des multiplicateurs de Lagrange fixant les contraintes $\Phi_m = 0$. On retrouve également que le principe variationnel n'est pas changé par la transformation $H_c \rightarrow H_c + b^m(p, q)\Phi_m$, où les b^m sont simplement absorbés par les u^m .

Tout ce que l'on a fait jusque là est simplement d'inverser la transformée de Legendre afin de passer du formalisme Lagrangien au formalisme Hamiltonien, obtenant ainsi des équations du mouvement équivalentes. On va maintenant étudier de plus près ces équations du mouvement. Pour cela, on rappelle que pour toute fonction arbitraire $F(p, q)$ de l'espace des phases, on peut écrire en utilisant (3.10) :

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + u^m \{F, \Phi_m\} \quad (3.12)$$

où les crochets de Poisson sont définis de manière habituelle par

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \quad (3.13)$$

Par ailleurs, on va désormais distinguer deux cas d'égalité : l'*égalité forte* lorsque c'est une identité algébrique, vraie sur tout l'espace des phases (notée $\Phi_j = 0$) et l'*égalité faible* lorsqu'elle n'est vérifiée numériquement que sur la surface des contraintes (notée $\Phi_j \approx 0$).

3.1.3 Contraintes secondaires

On étudie maintenant les conséquences algébriques des équations du mouvement (3.10). Une condition directe de cohérence est la conservation dans le temps des contraintes primaires :

$$\{\Phi_j, H_c\} + u^m \{\Phi_j, \Phi_m\} \approx 0 \quad m = 1, \dots, M, \quad (3.14)$$

On a alors deux possibilités : soit cette nouvelle relation contraint les fonctions u^m , soit elle est indépendante de ces fonctions et donne une relation n'impliquant que les variables canoniques. Dans ce deuxième cas, si cette relation est indépendante des M contraintes primaires, elle donne lieu à une nouvelle contrainte appelée *contrainte secondaire*. Celle-ci vérifie également la relation de cohérence (3.14) et peut donc donner de nouvelles contraintes tertiaires, quaternaires et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait épuisé toutes les conditions de cohérence (le nombre de contraintes étant borné par le nombre de variables). On a finalement explicité K nouvelles contraintes qui viennent s'ajouter aux M premières : on les note Φ_j , avec $j = 1, \dots, M + K$. On fait ici l'hypothèse que ces contraintes sont également indépendantes sur toute la surface des contraintes.

Une fois cet ensemble complet de contraintes explicité, on peut restreindre les multiplicateurs de Lagrange :

$$\{\Phi_j, H_c\} + u^m \{\Phi_j, \Phi_m\} \approx 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, M + K, \quad (3.15)$$

qui correspondent à $M + K$ équations linéaires non homogènes des M variables $u_m(p, q)$. Si le Lagrangien est cohérent, il existe au moins une solution. La solution générale est de la forme $U^m + V^m$ où U^m est une solution particulière et V^m une solution générale associée au système homogène $V^m \{\Phi_j, \Phi_m\} \approx 0$. Si on note $\{V_l^m, l = 1, \dots, L\}$ une base de l'espace des solutions, on trouve la solution générale :

$$u^m \approx U^m + v^l V_l^m, \quad l = 1, \dots, L \quad (3.16)$$

où v^l sont des fonctions arbitraires. On a ainsi séparé u^m en une partie fixée U^m par les conditions de cohérence et une autre complètement arbitraire $v^l V_l^m$.

3.1.4 Hamiltonien total

On peut maintenant revenir aux équations du mouvement et réécrire (3.12) sous la forme équivalente suivante :

$$\dot{F} \approx \left\{ F, H' + v^l \Phi_l \right\} \quad (3.17)$$

où l'on a noté $H' = H_c + U^m \Phi_m$ et $\Phi_l = V_l^m \Phi_m$.

La fonction $H_T = H' + v^l \Phi_l$ est appelé *Hamiltonien total* (on notera que cette décomposition n'est pas unique car elle dépend de U_m). Les équations du mouvement s'écrivent maintenant très simplement comme :

$$\boxed{\dot{F} \approx \{F, H_T\}} \quad (3.18)$$

et sont équivalentes par construction aux équations lagrangiennes du mouvement de départ, mais en ayant explicité la présence de L fonctions arbitraires. Dans la prochaine partie, nous allons voir que ces fonctions sont dues à la présence de symétries de jauge.

3.2 Contraintes de première et de deuxième classe

3.2.1 Contraintes de première classe et générateur des transformations de jauge

Grâce à une première classification en contraintes primaires et secondaires, nous avons pu obtenir l'ensemble des contraintes du système de manière itérative. Maintenant, nous allons procéder à une seconde classification indépendante en *contraintes de première et de deuxième classe*, plus pertinente pour l'étude des symétries de jauge.

On appelle *fonction de première classe* une fonction F dont les crochets de Poisson avec chacune des contraintes s'annulent faiblement, *i.e.*

$$\forall j \in \llbracket 1, M + K \rrbracket, \quad \{F, \Phi_j\} \approx 0 \quad (3.19)$$

Lorsque ce n'est pas le cas, la fonction est dite de *seconde classe*. Par construction H' et les Φ_a sont des fonctions de première classe : l'Hamiltonien total est la somme d'un Hamiltonien de première classe et d'une combinaison linéaire arbitraire des contraintes primaires de première classe. De plus, l'une des caractéristiques importantes de ces fonctions est qu'elles restent de première classe sous l'action des crochets de Poisson. On s'attend donc à ce qu'un certain nombre de contraintes secondaires soient aussi de première classe.

Regardons ce que ces contraintes ont de particulier. On a vu que la présence de fonctions arbitraires dans l'Hamiltonien indique que toutes les variables canoniques ne sont pas des observables : pour un même état physique du système, il y a plusieurs p et q possibles. Si on dispose d'une condition initiale (p_n, q^n) qui détermine entièrement l'état du système à un instant donné, on s'attend à ce que les équations du mouvement déterminent complètement les états aux instants postérieurs. Toute ambiguïté due à la présence de fonctions arbitraires dans ces équations devrait être physiquement inobservable. Ainsi, les v^a indiquent la présence de symétries de jauge qui apparaissent comme des redondances de description.

Explicitons ces ambiguïtés : une fonction F de l'espace des phases qui évolue entre l'instant t et $t' = t + \delta t$ en partant d'un même état physique, avec deux choix arbitraires de fonction v^l et $v^{l'}$ à l'instant t , aura le même état physique à l'instant $t' = t + \delta t$. Par conséquent, la transformation

$$\boxed{\delta F = \delta v^l \{F, \Phi_l\}} \quad (3.20)$$

où $\delta v^l = (v^l - v^{l'}) \delta t$, ne change pas l'état physique du système. (3.20) est appelée une *transformation de jauge* et Φ_l est un générateur de cette transformation.

Toute contrainte primaire de première classe génère donc une transformation de jauge. On peut également montrer que c'est le cas de $\{\Phi_l, H'\}$ et donc de certaines contraintes secondaires de première

classe. Le plus souvent, et ce sera le cas ici, on suppose la conjecture de Dirac : *toutes les contraintes de première classe génèrent des transformations de jauge*. Même s'il est assez facile de construire des cas pathologiques où cette conjecture est fautive, certains arguments de quantification tendent à montrer qu'elle devrait être vérifiée par tout système d'intérêt [17].

Les équations du mouvement obtenues à partir de H_T ne contiennent qu'autant de fonctions de jauge arbitraires qu'il n'y a de contraintes primaires de première classe. Pour avoir les équations les plus générales possibles, prenant en compte tous les degrés de liberté de jauge, il faut ajouter à H_T les fonctions arbitraires associées aux contraintes secondaires de première classe. On pose alors

$$H_E = H' + u^\alpha \gamma_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, A \quad (3.21)$$

appelée *Hamiltonien étendu*, où on a noté γ_α toutes les contraintes de première classe. Ainsi pour les observables physiques, à invariance de jauge, l'évolution est la même pour H' , H_T et H_E mais pour les autres, il faut utiliser H_E pour rendre compte de tous les degrés de liberté de jauge.

3.2.2 Crochets de Dirac et élimination des contraintes de seconde classe

Maintenant que l'on a traité du cas des contraintes de première classe, regardons ce qui se passe avec les contraintes de seconde classe. On va faire l'hypothèse que le nombre de contraintes de seconde classe est constant sur la surface des contraintes, *i.e.* en notant

$$C_{jj'} = \{\Phi_j, \Phi_{j'}\}, \quad (j, j') \in \llbracket 1, M + K \rrbracket \quad (3.22)$$

la matrice des crochets de Poisson de toutes les contraintes, le rang de cette matrice est constante sur Σ .

On note à partir de maintenant χ_β les contraintes de seconde classe ($\beta = 1, \dots, B$). On a

$$C_{jj'} \approx \begin{matrix} & \gamma_\beta & \chi_\beta \\ \gamma_\alpha & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \\ \chi_\alpha & \end{matrix} \quad (3.23)$$

où $C_{\alpha\beta}$ est antisymétrique. On va faire l'hypothèse supplémentaire que $\det C_{\alpha\beta} \neq 0$ sur la surface $\{\chi_\alpha = 0\}$ et pas seulement sur $\{\gamma_\alpha = 0, \chi_\alpha = 0\}$. On va noter $C^{\alpha\beta}$ sa matrice inverse. On remarque par ailleurs que comme la matrice est antisymétrique, le nombre de contraintes de seconde classe doit être pair pour que le déterminant soit non nul, ce qui nous resservira lorsque l'on comptera le nombre de degrés de liberté.

On définit maintenant les *crochets de Dirac* par :

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\} \quad (3.24)$$

On vérifie que les crochets de Dirac possèdent bien les bonnes propriétés d'antisymétrie, de distribution et vérifient l'identité de Jacobi. De plus, ils ont les propriétés intéressantes suivantes :

$$\{\chi_\alpha, F\}_D = 0, \quad \{\gamma_\alpha, F\}_D \approx \{\gamma_\alpha, F\}, \quad \{F, G\}_D \approx \{F, G\}, \quad (3.25)$$

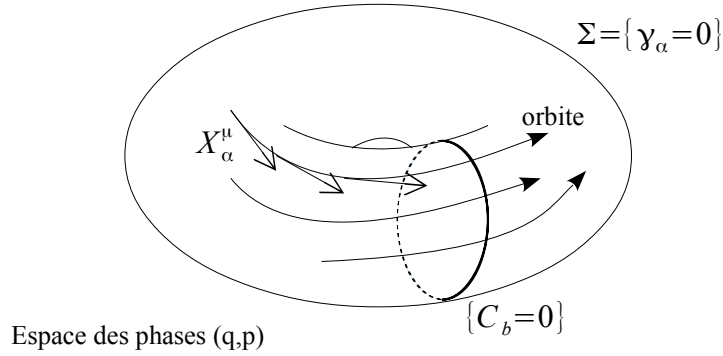
$$\{F, \{G, H\}_D\}_D \approx \{F, \{G, H\}\},$$

pour F une fonction quelconque et G et H des fonctions de première classe. Comme l'Hamiltonien étendu est de première classe, le crochet de Dirac avec H_E donne les bonnes équations du mouvement

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} \approx \{F, H_E\}_D. \quad (3.26)$$

De plus, d'après (3.25), les contraintes de première classe génèrent toujours des transformations de jauge et on peut fixer les contraintes de seconde classe à zéro fortement sans changer les crochets. Les contraintes de seconde classe apparaissent comme des identités algébriques reliant les variables canoniques et peuvent servir à éliminer certaines variables.

FIGURE 1 – Fixation de la jauge



Ainsi, après s'être servi des crochets de Poisson pour déterminer les contraintes de première et seconde classe, on peut les remplacer par les crochets de Dirac qui donnent les mêmes équations du mouvement et les mêmes générateurs de jauge, tout en éliminant les contraintes de seconde classe. Passer aux crochets de Poisson revient à étudier un système avec moins de degrés de liberté et des contraintes toutes de première classe.

3.3 Fixation de la jauge et degrés de liberté

Comme nous l'avons vu précédemment, un système de jauge peut être considéré comme un système où les variables dynamiques sont décrites dans un référentiel particulier mais dont le choix reste arbitraire. On peut alors choisir, pour enlever l'ambiguïté, de *fixer la jauge*, *i.e.* de se placer dans un système de coordonnées particulier, afin d'avoir une correspondance biunivoque entre les états physiques et les variables canoniques.

Cette fixation de jauge prend la forme d'un système de contraintes supplémentaires

$$C_b [q^n, p_n] \approx 0 \quad (3.27)$$

qui doit enlever l'ambiguïté sur l'état physique. Pour cela, ces conditions de jauge doivent être accessibles, *i.e.* en partant de n'importe quel point (q^i, p_i) , il doit être possible par des transformations de jauge d'atteindre la surface (3.27). De plus, elles doivent fixer la jauge complètement : il ne doit pas y avoir de transformation de jauge autre que l'identité qui préserve cette surface, ce qui s'écrit

$$\delta C_b = \delta u^\alpha \{C_b, \gamma_\alpha\} \approx 0 \Rightarrow \delta u^\alpha = 0 \quad (3.28)$$

ou encore

$$\det \{C_b, \gamma_\alpha\} \neq 0 \quad (3.29)$$

C'est en réalité la condition pour que les contraintes C_b et γ_α forment un ensemble de contraintes de seconde classe. (3.29) implique que le nombre de conditions de jauge doit être égale au nombre de contraintes de première classe.

Cette fixation de jauge peut également être interprétée de manière géométrique comme la réduction de l'espace des phases en quotientant la surface des contraintes $\Sigma = \{\gamma_\alpha = 0\}$ par les orbites de jauge (voir la figure 1).

On peut maintenant compter le nombre de degrés de liberté hamiltoniens d'un système de jauge. En partant d'un Hamiltonien avec $2N$ variables canoniques, A contraintes de première classe et B contraintes de seconde classe, on commence par fixer complètement la jauge. On obtient un système physique équivalent avec $2N$ variables canoniques et $2A + B$ contraintes de seconde classe. Ensuite, on

utilise les crochets de Dirac afin d'obtenir un système équivalent sans contrainte et avec $2N - 2A - B$ variables canoniques.

Finalement le système possède $2N - 2A - B$ degrés de liberté hamiltoniens, ce qui correspond en formalisme lagrangien à $(2N - 2A - B)/2$ degrés de liberté, qui est bien un entier car B est pair d'après le paragraphe 3.2.2..

3.4 Exemple

Nous allons maintenant illustrer cette méthode par l'exemple suivant :

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (q_2)^2 e^{q_1} \quad (3.30)$$

Les équations du mouvement, données par les équations d'Euler-Lagrange (2.16) :

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = (q_2)^2 e^{q_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = 2q_2 e^{q_1} = 0 \quad (3.31)$$

se réduisent à $q_2 = 0$. On obtient les moments conjugués $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0$ et $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 0$, soit :

$$\det \left(\frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}^n} \right) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

La condition (3.2) d'inversibilité des moments conjugués et des vitesses n'est pas vérifiée. Les moments ne sont pas indépendants : il existe des contraintes primaires qui sont ici

$$\Phi_1 = p_1 = 0, \quad \Phi_2 = p_2 = 0 \quad (3.33)$$

Le rang de la matrice (3.32) est bien constant dans l'espace des phases, comme supposé en 3.1.1. Ces contraintes définissent une sous-variété Σ de dimension 2 de l'espace des phases (q, p) , le plan $(q_1, q_2, 0, 0)$, qui n'est pas en correspondance biunivoque avec l'espace (q, \dot{q}) .

On écrit maintenant l'Hamiltonien canonique :

$$H_c = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L = -(q_2)^2 e^{q_1} \quad (3.34)$$

On remarque que l'application directe des équations d'Hamilton aurait donné $\dot{q}_1 = \partial H_c / \partial p_1 = 0$ qui n'est pas équivalent aux équations lagrangiennes (3.31). Ceci provient du fait que l'Hamiltonien n'est pas uniquement déterminé par (3.34) sur tout l'espace (p, q) mais seulement sur la surface (3.33) : il faut ajouter à l'Hamiltonien canonique deux fonctions supplémentaires u_1 et u_2 sous la forme de multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes primaires. Les équations hamiltoniennes équivalentes aux équations lagrangiennes sont alors (3.10) :

$$\dot{q}_1 = u_1, \quad \dot{q}_2 = u_2, \quad \dot{p}_1 = (q_2)^2 e^{q_1}, \quad \dot{p}_2 = 2q_2 e^{q_1}, \quad p_1 = p_2 = 0 \quad (3.35)$$

On introduit maintenant les crochets de Poisson

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \quad (3.36)$$

qui vérifient, pour toute fonction $F(p, q)$ de l'espace des phases :

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + u_1 \{F, \Phi_1\} + u_2 \{F, \Phi_2\} \quad (3.37)$$

On peut réécrire les équations (3.35) en explicitant un certain nombre de conditions de cohérence. La conservation dans le temps de la contrainte Φ_1

$$\dot{\Phi}_1 = \{\Phi_1, H_c\} = (q_2)^2 e^{q_1} \approx 0 \quad (3.38)$$

donne une contrainte secondaire $\Phi_3 = q_2 \approx 0$. En itérant avec Φ_2 et Φ_3 , on contraint les variables u_1 et u_2 :

$$\dot{\Phi}_2 = \{\Phi_2, H_c\} = 2q_2 e^{q_1} = 2\Phi_3 e^{q_1} \approx 0, \quad \dot{\Phi}_3 = \{\Phi_3, H_c\} + u_2 \{\Phi_3, \Phi_2\} = u_2 \approx 0 \quad (3.39)$$

Les multiplicateurs de Lagrange (3.16) vérifient donc :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

où v est une fonction quelconque. L'Hamiltonien total s'écrit finalement :

$$H_T = H_c + u_1 \Phi_1 = -q_2^2 e^{q_1} + v p_1 \quad (3.41)$$

On va maintenant distinguer les contraintes de première et de seconde classe :

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = 0, \quad \{\Phi_1, \Phi_3\} = 0, \quad \{\Phi_2, \Phi_3\} = -1 \quad (3.42)$$

Les contraintes Φ_2 et Φ_3 sont de seconde classe car leur crochet commun est non nul. Les crochets de Poisson de la contrainte Φ_1 avec Φ_2 et Φ_3 sont nuls. Φ_1 est donc de première classe et la transformation de jauge associée est :

$$\delta F = \epsilon \{F, \Phi_1\} = -\epsilon \frac{\partial F}{\partial q_1} \quad (3.43)$$

correspondant à l'invariance de jauge $q_1 \rightarrow q_1 - \epsilon$. Il n'y a pas d'autres symétries de jauge et l'Hamiltonien étendu est égal à l'Hamiltonien total.

On s'intéresse à la matrice des commutateurs des contraintes :

$$C_{jj'} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

qui permet de définir les crochets de Dirac. Ceux-ci sont donnés par (3.24) :

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\} = \{F, G\} - \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial G}{\partial p_2} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial G}{\partial q_2} = \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial G}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial G}{\partial q_1} \quad (3.45)$$

On vérifie facilement les relations (3.25) et (3.26). On remarque que fixer fortement $q_2 = p_2 = 0$ ne change pas les équations du mouvement et les symétries de jauge : le système est équivalent au système où les seules variables dynamiques sont q_1 et p_1 .

On peut ensuite fixer la jauge en ajoutant la contrainte $C = q_1 \approx 0$ qui vérifie bien :

$$\delta C = \delta u_1 \{C, \Phi_1\} = \delta u_1 \approx 0 \quad (3.46)$$

(la contrainte fixe entièrement la jauge). On est donc ramener à un système (q_1, p_1) ayant les 2 contraintes de deuxième classe $q_1 \approx p_1 \approx 0$ qu'on peut éliminer en remplaçant par de nouveaux crochets de Dirac.

Le lagrangien (3.30) ne possède donc aucun degré de liberté, en accord avec la formule de la fin du paragraphe 3.3.

3.5 Extension aux théories des champs

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons à des champs plutôt qu'à des particules. Cependant la discussion précédente reste essentiellement la même, en considérant une densité hamiltonienne $\mathcal{H}_T(x)$ telle que

$$H_T = \int d^3x \mathcal{H}_T(x) \quad (3.47)$$

et en ajoutant des fonctions de Dirac $\delta(x - y) \equiv \delta^{(3)}(x - y)$ aux relations de commutation :

$$\{q_i(x), p^j(y)\} = \delta(x - y)\delta_i^j \quad (3.48)$$

L'évolution de n'importe quel champ $F(x)$ est alors donnée par

$$\dot{F}(x) = \{F(x), H_T\} = \int d^3y \{F(x), \mathcal{H}_T(y)\}. \quad (3.49)$$

On est maintenant prêt à appliquer la procédure de Dirac à l'étude hamiltonienne de la RG.

4 Analyse hamiltonienne de la RG

4.1 Formalisme ADM et Hamiltonien de la RG

Une façon commode en RG pour passer en formulation hamiltonienne est d'utiliser le *formalisme ADM*, du nom de Arnowitt, Deser et Misner qui l'ont proposé dans les années 1960 (voir l'appendice du livre de R. M. Wald [19] pour plus de détails). Il est encore appelé décomposition $3 + 1$ car il permet de séparer la partie de type espace de la métrique du temps, permettant de réaliser de manière plus commode une transformée de Legendre à partir du Lagrangien. Il permet de réexprimer la RG en terme de nouvelles variables dynamiques : la *fonction lapse* N , le *vecteur shift* N^i et la *métrique spatiale induite* h_{ij} .

4.1.1 Feuilletage de l'espace temps

L'espace-temps est décrit par une variété (\mathcal{M}, g) lisse à 4 dimensions, avec g une métrique de Lorentz de signature $(-, +, +, +)$. L'idée de départ du formalisme ADM est de feuilletter cette variété en hypersurfaces Σ_t paramétrées par une fonction globale de temps $t(x^\mu)$ (*i.e.* $\Sigma_t = t^{-1}(\{t\})$) tel que Σ_t soit de type espace, *i.e.* la métrique induite sur ces hypersurfaces a une signature $(+, +, +)$ (on suppose que c'est possible). On associe à ce feuilletage le champ de vecteurs n^μ normal aux Σ_t tel que $n^\mu n_\mu = -1$ ainsi que la projection \mathcal{P} sur l'hypersurface : $\mathcal{P}(\mathbf{u}) = h_\nu^\mu u^\nu = (\delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu)u^\nu$ (en effet $h_\nu^\mu h_\rho^\nu = h_\rho^\mu$ et $h_\nu^\mu n^\nu = 0$).

Sur chacune des hypersurfaces, on définit la métrique $h_{\mu\nu}$ purement spatiale induite par $g_{\mu\nu}$ sur Σ_t par :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_P(\Sigma_t) \times T_P(\Sigma_t), \quad h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (4.1)$$

où $T_P(\Sigma_t)$ est l'espace tangent à la sous-variété Σ_t au point P et h et g sont les formes bilinéaires associées respectivement à la métrique $h_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ définies sur $T_P(\Sigma_t)$ et $T_P(\mathcal{M})$. Cette métrique peut être étendue à tout l'espace par :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in T_P(\mathcal{M}) \times T_P(\mathcal{M}), \quad h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv h(\mathcal{P}(\mathbf{u}), \mathcal{P}(\mathbf{v})) \quad (4.2)$$

que l'on peut expliciter :

$$\forall(dx^\mu, dx^\nu) \in T_P(\Sigma_t) \times T_P(\Sigma_t), \quad h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} h_\alpha^\mu dx^\alpha h_\beta^\nu dx^\beta = (g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu) dx^\mu dx^\nu \quad (4.3)$$

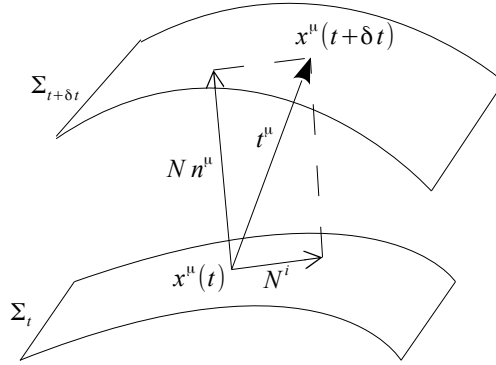
On choisit maintenant un champ de vecteurs t^μ , inverse du gradient de $t(x^\mu)$:

$$t^\mu \nabla_\mu t = 1 \quad (4.4)$$

et qui représente le flot du temps. Celui-ci nous permet d'avoir une correspondance entre les points des hypersurfaces Σ_{t_0} et Σ_t : on associe à chaque point P_0 de Σ_{t_0} , le point d'intersection P_t entre Σ_t et la courbe $x^\mu(\tau)$ définie par $dx^\mu/d\tau = t^\mu$ et $x^\mu(\tau_0) = x_{P_0}^\mu$, avec la paramétrisation naturelle $x^\mu(t) \in \Sigma_t$. La relation (4.4) implique en effet que :

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \nabla_\mu t = \frac{dt}{d\tau} = 1 \quad (4.5)$$

FIGURE 2 – Foliation de l'espace temps



On décompose ensuite t^μ en un vecteur tangent et un vecteur normal à Σ_t :

$$t^\mu = N^\mu + N n^\mu \quad (4.6)$$

où N^μ et N s'appellent respectivement le *vecteur shift* et la *fonction lapse*. La distance entre le point $x_1^i \equiv x^\mu(t)$ et la projection x_2^i du point $x^\mu(t + \delta t)$ sur l'hypersurface Σ_t :

$$h_\nu^\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = N^\mu \Rightarrow x_2^i = x_1^i + N^i(t, x^i) dt \quad (4.7)$$

Le vecteur shift représente le mouvement tangentiel à la surface Σ_t : $N^i = h_j^i t^j$. Par ailleurs, un observateur qui se déplace selon la courbe $dx^\mu/d\tau = n^\mu$ de la surface Σ_t à la surface $\Sigma_{t+\delta t}$ a son temps propre qui diffère de la coordonnées du temps par la fonction lapse :

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \nabla_\mu t = n^\mu \nabla_\mu t \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{N} \Rightarrow d\tau = N(t, x^i) dt \quad (4.8)$$

La fonction lapse représente le taux du flot de temps propre suivant la coordonnée t .

La métrique $g_{\mu\nu}$ peut alors se réécrire en terme de la métrique induite h_{ij} , du vecteur shift N_i et de la fonction lapse N en utilisant :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) - (N dt)^2 \quad (4.9)$$

qui donne la correspondance :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N_k N^k & \cdots & N_i & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \\ N_j & & h_{ij} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \cdots & \frac{N^i}{N^2} & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \\ \frac{N^j}{N^2} & & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Les variables h^{ij} , N^i et N définissent donc complètement le champ métrique de façon biunivoque. On va donc pouvoir les utiliser comme les nouvelles variables dynamiques de l'action d'Einstein-Hilbert. On notera par ailleurs la relation utile suivante :

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = N\sqrt{h} \quad (4.11)$$

4.1.2 L'action d'Einstein-Hilbert en variables ADM

On va noter D_c la dérivée covariante dans l'espace (Σ_t, h) , comme définie dans le paragraphe 2.1. On vérifie bien que $D_c h_{ij} = 0$. De la même manière, on pose $R^l{}_{ijk}{}^{(3)}$ le tenseur de Riemann dans cet espace. On étend la dérivée covariante D_c à tout l'espace tangent par :

$$D_c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} = h_{d_1}^{a_1} \dots h_{d_k}^{a_k} h_{b_1}^{e_1} \dots h_{b_l}^{e_l} h_c^f \nabla_f T^{d_1 \dots d_k}{}_{e_1 \dots e_l} \quad (4.12)$$

appelée dérivée extérieure.

Une quantité qui joue un rôle important dans ce formalisme est la courbure extrinsèque qui mesure la courbure de Σ_t dans l'espace (\mathcal{M}, g) en évaluant le changement de direction du vecteur normal n^μ lorsqu'on se déplace sur Σ_t . Le tenseur symétrique de courbure extrinsèque est donné par [19] :

$$K_{ij} \equiv D_i n_j = \frac{1}{2}(D_i n_j + D_j n_i) = \frac{1}{2} \mathcal{L}'_{n^\mu} h_{ij} \quad (4.13)$$

où \mathcal{L}' est la dérivée de Lie dans l'espace (Σ_t, h) étendue aux tenseurs de l'espace (\mathcal{M}, g) :

$$\mathcal{L}'_{\underline{f}} T^{a_1 \dots}{}_{b_1 \dots} = h_{d_1}^{a_1} \dots h_{b_1}^{e_1} \dots \mathcal{L}'_{\underline{f}} T^{d_1 \dots}{}_{e_1 \dots} \quad (4.14)$$

avec $\mathcal{L}'_{\underline{f}}$ donné par la formule (A.1).

D'après (4.6), on a $\mathcal{L}_{t^\mu} h_{ij} = \mathcal{L}_{N^\mu} h_{ij} + N \mathcal{L}_{n^\mu} h_{ij}$ ce qui donne :

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(\dot{h}_{ij} - D_i N_j - D_j N_i \right) \quad (4.15)$$

où l'on a noté $\dot{h}_{ij} = \mathcal{L}'_{t^\mu} h_{ij}$.

On cherche à réécrire l'action d'Hilbert-Einstein (2.21). Il faut donc trouver l'expression du tenseur de Ricci en terme des nouvelles variables ADM. On remarque tout d'abord qu'on peut relier le tenseur de Riemann et le tenseur d'Einstein :

$$R_{ijkl}^{(3)} h^{ij} h^{kl} = R_{ij}^{(3)} (g^{ij} + n^i n^j) (g^{kl} + n^k n^l) = 2G_{ij}^{(3)} n^i n^j \quad (4.16)$$

à partir de quoi, on obtient le scalaire de Ricci en fonction de ces deux tenseurs :

$$R = 2 (G_{ij} n^i n^j - R_{ij} n^i n^j) \quad (4.17)$$

En revenant à la définition du tenseur de Riemann à partir du commutateur des dérivées covariantes, on obtient après un peu de calcul :

$$R^l{}_{ijk}{}^{(3)} = h_i^a h_j^b h_k^c h_d^l R_{abc}^d{}^{(3)} - K_{ik} K_j^l + K_{jk} K_i^l \quad (4.18)$$

Ce qui donne finalement :

$$G_{ij} n^i n^j = \frac{1}{2} \left(R^{(3)} - K_{ij} K^{ij} + K^2 \right) \quad (4.19)$$

$$R_{ij} n^i n^j = K^2 - K_{ij} K^{ij} - \nabla_k \left(n^k \nabla_l n^l \right) + \nabla_l \left(n^k \nabla_k n^c \right) \quad (4.20)$$

où l'on peut ne pas tenir compte par la suite des termes de divergence d'après la remarque de la note du paragraphe 2.3. En remplaçant les deux dans (4.17), on obtient l'expression de l'action d'Einstein-Hilbert en variables ADM :

$$\boxed{S_{EH} = \int d^4x N \sqrt{h} \left(K^{ij} K_{ij} - K^2 + R^{(3)} \right)} \quad (4.21)$$

4.1.3 Passage en formulation hamiltonienne

Les moments conjugués sont donnés par :

$$\pi \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{EH}}{\delta \dot{N}} = 0, \quad \pi_i \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{EH}}{\delta \dot{N}^i} = 0, \quad \pi^{ij} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{EH}}{\delta \dot{h}_{ij}} = h^{-1/2} (K^{ij} - h^{ij} K) \quad (4.22)$$

L'Hamiltonien canonique s'écrit :

$$H_c = \int d^3x \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L} \quad (4.23)$$

En se souvenant que $\dot{h}_{ij} = 2NK_{ij} + D_i N_j + D_j N_i$, on obtient :

$$H_c = \int d^3x \sqrt{h} N \left(K^2 - K_{ij} K^{ij} + 2h^{-1/2} \pi^{ij} K_{ij} - R^{(3)} \right) + \pi^{ij} (D_i N_j + D_j N_i) \quad (4.24)$$

Puis par intégration par partie, on réécrit l'Hamiltonien de manière à faire apparaître les multiplicateurs de Lagrange N et N^i :

$$H_c = \int d^3x \left(N \mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i \right) \quad (4.25)$$

où les 4 contraintes sont

$$\mathcal{H} = h^{-1/2} (\pi^{ij} \pi_{ij} - \pi^2) - h^{1/2} R^{(3)}, \quad \mathcal{H}_i = -2D_j \pi^j_i \quad (4.26)$$

4.2 Contraintes et degrés de liberté

On va maintenant s'intéresser à l'algèbre des contraintes de la RG. Pour cela, on va utiliser les crochets de Poisson vérifiant

$$\begin{aligned} \{N(x), \pi(y)\} &= \delta(x-y) \\ \{N^i(x), \pi_j(y)\} &= \delta_j^i \delta(x-y) \\ \{h_{ij}(x), \pi^{kl}(y)\} &= \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) \delta(x-y) = \delta_{ij}^{kl} \delta(x-y) \end{aligned}$$

ce qui revient à poser $h_{ij} \equiv h_{ji}$ dans les équations. Il sera également utile de considérer des fonctions tests pour ne pas avoir à manipuler des diracs dans les calculs. On notera donc :

$$\mathcal{H}(f) = \int d^3x f(x) \mathcal{H}(x), \quad \mathcal{H}(\underline{g}) = \int d^3x g^i(x) \mathcal{H}_i(x) \quad (4.27)$$

où f et g^i sont des fonctions lisses et telles que les intégrales soient bien définies.

Les 4 contraintes primaires sont données par les moments conjugués de N et N^i . On les notera

$$\Phi^0 \equiv \pi = 0, \quad \Phi_i \equiv \pi_i = 0 \quad (4.28)$$

Leur conservation dans le temps donne directement les contraintes secondaires

$$\Phi_4 \equiv \mathcal{H} \approx 0, \quad \Phi_{4+i} \equiv \mathcal{H}_i \approx 0 \quad (4.29)$$

(ce sont les contraintes réalisées par les multiplicateurs de Lagrange dans le formalisme lagrangien). On remarque que l'Hamiltonien de la RG est nul sur la surface des contraintes.

On peut alors montrer (voir appendice A ou encore [20] pour la résolution originale) les relations suivantes :

$$\{\mathcal{H}(\underline{g}), \mathcal{H}(f)\} = \mathcal{H}(g^k \nabla_k f^i - f^k \nabla_k g^i) \quad (4.30)$$

$$\{\mathcal{H}(\underline{g}), \mathcal{H}(f)\} = \mathcal{H}(g^k \nabla_k f) \quad (4.31)$$

$$\{\mathcal{H}(g), \mathcal{H}(f)\} = \mathcal{H}(h^{ij} (g \nabla_j f - f \nabla_j g)) \quad (4.32)$$

Les crochets de Poisson des contraintes secondaires avec l'Hamiltonien total vérifient donc

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}(f), H_T\} &= \{\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(N) + \mathcal{H}(\underline{N})\} & (4.33) \\
&= \mathcal{H}(h^{ij}(N\nabla_j f - f\nabla_j N)) - \mathcal{H}(N^i\nabla_i f) \\
&\approx 0 \\
\{\mathcal{H}(\underline{g}), H_T\} &= \mathcal{H}(g^i\nabla_i N) + \mathcal{H}(g^k\nabla_k N^i - f^k\nabla_k N^i) \\
&\approx 0
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de contraintes supplémentaires. De plus, comme \mathcal{H} et \mathcal{H}_i ne contiennent pas les variables N et N^i , toutes les contraintes sont de première classe.

L'Hamiltonien de départ ayant 20 variables canoniques, il y a d'après la discussion de 3.3 : $(20 - 2 \times 8)/2 = 2$ degrés de liberté qui correspondent aux deux modes tensoriels des ondes gravitationnelles (voir la section 7.3).

Deuxième partie

Théories de la gravité massive

Dans cette partie, nous allons présenter une rapide introduction aux théories de la gravité massive en portant une attention particulière aux pathologies rencontrées (voir [4] et [5] pour des revues plus approfondies). Pour cela, après avoir motivé la recherche d'une telle théorie, nous commencerons par étudier l'action d'un graviton massif libre (*i.e.* n'interagissant pas avec lui-même) qui s'avère avoir une forme essentiellement unique, celle de *Fierz-Pauli*, et présente une inévitable discontinuité, dite de *vDVZ*, du nom de van Dam-Veltman-Zhakarov. Nous chercherons ensuite à compléter non-linéairement la théorie libre, ce qui correspond à rajouter les auto-interactions du graviton avec lui-même. Cette complétion présente sa propre difficulté (le *fantôme de Boulware-Deser*) mais permet d'en résoudre d'autres (*mécanisme de Vainshtein*).

5 Le graviton massif libre

5.1 Motivations phénoménologiques

La découverte récente de l'accélération de l'expansion de l'Univers a poussé de nombreux physiciens à chercher des alternatives à la RG. Du point de vue moderne de la théorie des champs, la RG est l'unique théorie non triviale d'une particule sans masse auto-interagissante de spin 2 et ne brisant pas l'invariance de Lorentz. Pour modifier cette théorie, il faut donc enlever une des hypothèses.

Ajouter une masse est particulièrement intéressant lorsqu'on cherche à modifier la RG à grande distance (ce qui pourrait expliquer l'accélération tardive de l'expansion). En effet un champ Ψ qui véhicule une particule de masse m va essentiellement satisfaire l'équation de Klein-Gordon $(\square - m^2)\Psi = 0$. En donnant une masse au graviton, on passe d'un potentiel statique en $V(r) \sim 1/r$ à un *potentiel de Yukawa* $V(r) \sim e^{-mr}/r$. Pour des distances $r \ll 1/m$, le potentiel est celui d'un graviton de masse nulle, et ce n'est qu'à large distance que l'effet de la masse se manifeste.

Une autre motivation vient du développement depuis une trentaine d'années des théories branaires de la gravité, par exemple le modèle DGP du nom de Dvali-Gabadadze-Porrati (voir [4]), où la masse du graviton émerge naturellement d'une dimension supplémentaire. On peut donner un rapide aperçu de comment cela est possible en considérant les *modes de Kaluza-Klein*. Essentiellement, dans ces théories, notre monde est une hypersurface de dimension 4 (la *brane*) plongée dans un espace plus grand de dimension 5 (le *bulk*). Seul le graviton peut "voir" cette dimension supplémentaire tandis que les champs du modèle standard sont confinés sur la brane. On suppose que la dimension supplémentaire est compacte circulaire de taille L . Un champ sans masse Ψ satisfait l'équation de Klein-Gordon :

$$\square_5 \Psi(x^\mu, y) = 0 \quad (5.1)$$

où \square_5 est le d'Alembertien à 5 dimensions. De plus, la circularité implique la périodicité de Ψ qui vérifie $\Psi(x^\mu, y + L) = \Psi(x^\mu, y)$, que l'on peut alors décomposer en série de Fourier :

$$\Psi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(x^\mu) e^{i \frac{2n\pi y}{L}} \quad (5.2)$$

En utilisant cette décomposition dans l'équation (5.1), on obtient :

$$\square_4 \Psi_n(x^\mu) - \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \Psi_n(x^\mu) = 0 \quad (5.3)$$

Ainsi, dans notre brane de dimension 4, la dimension circulaire supplémentaire se traduit par l'apparition de modes massifs $m = 2n\pi/L$. C'est ce qui se produit pour les gravitons dans le modèle DGP en

plus compliqué (le spectre des modes massifs est continu) et pour comprendre en détail cette théorie, il faut comprendre le comportement de chacun des modes massifs. En particulier, le modèle DGP présente également une discontinuité vDVZ et des fantômes, dont la résolution en gravité massive pourrait aider à l'en débarrasser.

5.2 Action de Fierz-Pauli

Nous allons maintenant construire explicitement une telle théorie, en commençant par le cas du graviton massif libre. Ce dernier est décrit par un tenseur symétrique $h_{\mu\nu}$ que l'on peut voir comme une perturbation autour d'une métrique de fond $f_{\mu\nu}$. Dans toute cette section, la métrique de fond sera la métrique plate $f_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$. L'action est supposée vérifier plusieurs propriétés : la théorie ne brise pas l'invariance de Lorentz, le terme cinétique (lorsque $m \rightarrow 0$) est le même que celui de la RG à l'ordre quadratique et le couplage est minimal avec la matière.

La manière la plus simple de construire une telle action est d'ajouter à l'action d'Einstein-Hilbert quadratique un terme supplémentaire de masse. Ce terme, que l'on prend sans dérivée⁴, est un scalaire quadratique en $h_{\mu\nu}$ formé par des combinaisons de $h_{\mu\nu}$ et $f_{\mu\nu}$: sa forme la plus générale est donc $\epsilon (h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \alpha h^2)$, où $\epsilon = \pm 1$ et $h \equiv h^\mu{}_\mu$ avec les indices montés et descendus à l'aide de la métrique de fond. Cependant le cas $\epsilon = -1$ est exclu⁵ et, comme nous allons le voir dans le paragraphe 5.3, seul le cas $\alpha = 1$ ne présente pas de fantôme. On obtient finalement l'action de Fierz-Pauli :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{PF} = M_p^2 \int d^4x \left[\left(-\frac{1}{4} \partial_\mu h_{\nu\rho} \partial^\mu h^{\nu\rho} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\nu h_\nu{}^\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\nu\rho} \partial^\nu h^{\mu\rho} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) + M_p^{-2} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

où la première ligne est seulement le développement à l'ordre quadratique de l'action d'Hilbert autour de la métrique plate et $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ est la trace de $h_{\mu\nu}$. En perturbant l'action suivant les $h^{\mu\nu}$, on obtient les équations du mouvement suivantes :

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} m^2 (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) + M_p^{-2} T_{\mu\nu} \quad (5.5)$$

où $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ est la linéarisation du tenseur d'Einstein (2.5) autour de la métrique plate :

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \partial_\rho \partial_{(\mu} h^{\rho}{}_{\nu)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \square h) \quad (5.6)$$

Si on suppose que la source est conservée selon la métrique de fond, *i.e.* $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$, on trouve en prenant la divergence de (5.5) que

$$\partial^\rho h_{\rho\mu} = \partial_\mu h \quad (5.7)$$

En prenant la divergence de (5.7) et en l'injectant dans (5.5), on obtient :

$$h = -\frac{2}{3} \frac{T}{m^2 M_p^2} \quad (5.8)$$

Lorsqu'on se place dans le vide, le graviton est donc transverse et sans trace : les 4 contraintes (5.7) et la contrainte (5.8) éliminent 5 degrés de liberté. Par conséquent le graviton de Fierz-Pauli propage 5 degrés de liberté, ce qui est confirmé dans le prochain paragraphe par une analyse hamiltonienne des contraintes. Ces 3 degrés de liberté supplémentaires par rapport à la RG proviennent de l'ajout du terme de masse qui brise explicitement la symétrie de jauge (2.10).

Les équations du mouvement s'écrivent simplement dans le vide :

$$(\square - m^2) h_{\mu\nu} = 0 \quad (5.9)$$

4. On ne peut obtenir de scalaire par contraction d'indice avec une dérivée d'ordre un et les dérivées d'ordre deux correspondent à une modification du terme cinétique, déjà étudiée dans d'autres contextes. À noter que les théories d'ordres supérieurs constituent un domaine de recherche très actif présentant de nombreuses difficultés théoriques.

5. Les équations du mouvement s'écriraient alors $(\square + m^2) h_{\mu\nu} = 0$ et le potentiel statique serait en $V(r) \sim e^{mr}/r$.

5.3 Analyse hamiltonienne de l'action de Fierz-Pauli

5.3.1 Cas $\alpha = 1$

On se place encore une fois en coordonnées $3 + 1$ qu'on linéarise autour de la métrique plate en prenant $n \equiv N - 1$ et $\tilde{h}_{ij} \equiv h_{ij} - \delta_{ij}$. Par la suite, on notera par simplicité $h_{ij} \equiv \tilde{h}_{ij}$ en faisant attention à ne pas confondre les deux notations. En partant de l'action d'Einstein-Hilbert (4.21) tronquée à l'ordre quadratique, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{PF} = \int d^4x & \left[K^{ij} K_{ij} - K^2 + \mathcal{R}^{(quad)} \right. \\ & \left. - n (\partial^i \partial_i h - \partial^i \partial^j h_{ij}) - \frac{m^2}{4} (h_{ij} h^{ij} - h^2 + 2N_i N^i - 4hn) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

où $\mathcal{R}^{(quad)}$ est le développement à l'ordre quadratique de $\mathcal{R}^{(3)}$, le scalaire de Ricci associé à l'hypersurface de type espace du formalisme ADM. Les moments conjugués correspondent aux moments linéarisés de la RG :

$$\pi_n = 0, \quad \pi_{N_i} = 0, \quad \pi^{ij} = (K^{ij} - h^{ij} K). \quad (5.11)$$

L'Hamiltonien canonique s'écrit finalement en terme des variables ADM linéarisées :

$$\begin{aligned} H_c = \int d^4x & \left[\left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 - \mathcal{R}^{(quad)} \right) + \frac{1}{4} m^2 (h^{ij} h_{ij} - h^2) \right. \\ & \left. + n (\partial^i \partial_i h - \partial^i \partial^j h_{ij} - m^2 h) - 2N_i \partial_j \pi^{ij} + \frac{1}{2} m^2 N_i N^i \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Les contraintes primaires sont de nouveau données simplement par

$$\Phi_0 = \pi_n = 0, \quad \Phi^i = \pi_{N_i} = 0. \quad (5.13)$$

La conservation des contraintes primaires donne facilement les 4 contraintes secondaires suivantes :

$$\Phi_4 = \partial^i \partial_i h - \partial^i \partial^j h_{ij} - m^2 h, \quad \Phi^{4+i} = -2\partial_j \pi^{ij} - m^2 N^i \quad (5.14)$$

Le calcul des crochets de Poisson, détaillé dans l'Appendice B, donne après un peu de travail les contraintes tertiaire et quaternaire

$$\Phi_8 = \partial_i \partial_j \pi^{ij} + m^2 \pi, \quad \Phi_9 = 2n + h. \quad (5.15)$$

où $2n + h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \approx 0$: on retrouve la condition (5.8) dans le vide.

On calcule ensuite l'algèbre des contraintes et on obtient

$$\{\Phi_0, \Phi_9\} = -2, \quad \{\Phi^j, \Phi_{4+i}\} = m^2 \delta^j_i, \quad (5.16)$$

$$\{\Phi_4(f), \Phi_8(g)\} = [-3m^2](fg), \quad (5.17)$$

où l'on a utilisé les notations des fonctions tests de la section 4.2. Les 10 contraintes sont donc de seconde classe, ce qui donne $(20 - 10)/2 = 5$ degrés de liberté comme trouvé dans le paragraphe précédent par analyse lagrangienne.

5.3.2 Cas $\alpha \neq 1$

Lorsque $\alpha \neq 1$, n^2 ne va plus s'annuler dans le terme de masse : n n'est plus alors un multiplicateur de Lagrange et ne propage plus de contraintes tertiaire et quaternaire. On s'attend donc à ce que le nombre de degrés de liberté soit modifié.

L'Hamiltonien total s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}
H_T = \int d^4x & \left[\mu_0 \pi_n + \mu_i \pi_{N_i} + \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 - \mathcal{R}^{(quad)} \right) + \frac{1}{4} m^2 (h^{ij} h_{ij} - h^2) \right. \\
& + n (\partial^i \partial_i h - \partial^i \partial^j h_{ij} - \alpha m^2 h) - 2 N_i \partial_j \pi^{ij} + \frac{1}{2} m^2 N_i N^i \\
& \left. - \frac{1}{4} m^2 (\alpha - 1) (n + 2h)^2 - \frac{3}{4} m^2 (1 - \alpha) h^2 \right] \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Les 4 contraintes secondaires sont :

$$\Phi_4 = \partial^i \partial_i h - \partial^i \partial^j h_{ij} - \alpha m^2 h + \frac{1}{2} m^2 n (1 - \alpha), \quad \Phi^{4+i} = -2 \partial_j \pi^{ij} - m^2 N^i \quad (5.19)$$

La conservation de ces contraintes fixe les fonctions μ_0 et μ_i en fonction des autres variables canoniques et ne donne pas de nouvelles contraintes. L'algèbre des contraintes donne alors :

$$\{\Phi_0, \Phi_4\} = \frac{1}{2} m^2 (\alpha - 1), \quad \{\Phi^j, \Phi_{4+i}\} = m^2 \delta^j_i,$$

On a finalement 8 contraintes de seconde classe, ce qui donne $(20 - 8)/2 = 6$ degrés de liberté : la trace de $h^{\mu\nu}$ n'est plus nulle dans le vide. Ce sixième degré de liberté est ce que l'on appelle un *fantôme* : l'Hamiltonien s'avère être pathologique. En effet, en fonction de la valeur de α , l'un des deux derniers termes $m^2 (\alpha - 1) (2n + h)^2$ ou $m^2 (1 - \alpha) h^2$ de (5.18) a un signe opposé au terme cinétique canonique. On peut alors s'attendre à ce que l'Hamiltonien ne soit pas borné inférieurement et qu'il puisse prendre des énergies négatives arbitrairement grandes. La plupart des trajectoires de son espace des phases seraient instables et divergeraient (voir le paragraphe 6.2 sur le fantôme de Boulware-Deser).

5.4 Discontinuité vDVZ

Une des caractéristiques qu'on souhaite obtenir avec notre théorie de la gravité massive est de retrouver la RG lorsque $m \rightarrow 0$. Cependant, on a vu que pour tout $m \neq 0$, la théorie propage 5 degrés de liberté contrairement à la RG. Il faut vérifier que les contributions des 3 degrés de liberté supplémentaires tendent vers zéro lorsqu'on prend la limite du graviton sans masse.

En injectant les contraintes (5.7) et (5.8) dans (5.5), on obtient :

$$-\frac{1}{2} (\square - m^2) h_{\mu\nu} = \frac{1}{M_P^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial_\mu \partial_\nu T}{m^2 M_P^2} \quad (5.20)$$

On va maintenant chercher une expression du propagateur de $h_{\mu\nu}$ pour $m \neq 0$ (voir [9]) tel que

$$h_{\mu\nu} = M_P^{-2} D_{\mu\nu\alpha\beta}^{(m \neq 0)} T^{\alpha\beta} \quad (5.21)$$

Pour cela on va réécrire l'équation (5.20) dans l'espace de Fourier :

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(p) = \frac{2M_P^{-2}}{p^2 + m^2} \left[\left(\tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \tilde{T} \right) + \frac{1}{3} \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \tilde{T} \right] \quad (5.22)$$

et on trouve :

$$\tilde{D}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(m \neq 0)} = \frac{1}{p^2 + m^2} \left(\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} - \frac{2}{3} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \eta_{\alpha\beta} \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) \quad (5.23)$$

On souhaite le comparer au cas $m = 0$. Pour cela, on va calculer le propagateur en RG dans un référentiel particulier. On se place en jauge harmonique où les équations de mouvement s'écrivent d'après (2.14) :

$$\square h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \square h = -\frac{2}{M_P^2} T^{\mu\nu} \quad (5.24)$$

En prenant la trace on trouve

$$\square h = \frac{2}{M_P^2} T \quad (5.25)$$

qu'on injecte dans l'équation (5.24). En passant en Fourier :

$$\tilde{h}^{\mu\nu}(p) = \frac{2M_P^{-2}}{p^2} \left(\tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tilde{T} \right) \quad (5.26)$$

On trouve finalement :

$$\tilde{D}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(m=0)} = \frac{1}{p^2} (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) \quad (5.27)$$

On note une différence de coefficient devant le troisième terme $\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}$ indépendante de la masse du graviton.

Montrons que celle-ci va entraîner de fait une discontinuité entre les théories massives et la RG lorsqu'on prend la limite $m \rightarrow 0$. Pour cela on va regarder le Lagrangien d'une source conservée $T_{\mu\nu}$ donnant un champ $h_{\mu\nu} = M_P^{-2} D_{\mu\nu\alpha\beta}^{(m \neq 0)} T^{\alpha\beta}$. On note qu'en RG, ce terme possède l'invariance de jauge linéarisée des difféomorphismes : on peut donc bien se placer en jauge harmonique et utiliser le propagateur (5.27).

S'il y avait continuité entre la théorie de la gravité massive et la RG, le terme cinétique devrait tendre continuellement vers celui de la RG et le terme de masse devrait s'annuler lorsque $m \rightarrow 0$. Regardons ce qui se passe avec le terme de couplage de la métrique avec la source. Dans l'espace de Fourier :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(m \neq 0)}(p) &= -\frac{1}{2} \tilde{T}^{\mu\nu} \tilde{D}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(m \neq 0)} \tilde{T}^{\alpha\beta} = -\frac{M_P^2}{p^2 + m^2} \left[T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T^2 \right] \\ \mathcal{A}^{(m=0)}(p) &= -\frac{1}{2} \tilde{T}^{\mu\nu} \tilde{D}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(m=0)} \tilde{T}^{\alpha\beta} = -\frac{M_P^2}{p^2} \left[T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^2 \right] \end{aligned}$$

On trouve que la limite de $\mathcal{A}^{(m \neq 0)}(p)$ lorsqu'on prend $m \rightarrow 0$ est différente de $\mathcal{A}^{(m=0)}(p)$. Pour une masse du graviton aussi petite que l'on veut, la théorie de Fierz-Pauli donne un Lagrangien différent de celui de la RG, ce qui entraîne des équations du mouvement différentes et donc une discontinuité dans les prédictions physiques. C'est la *discontinuité de vDVZ* qui semble fatale pour la théorie. En effet, en calculant le potentiel entre deux sources ponctuelles statiques (voir [5] pour le calcul complet), on trouve :

$$V_m = \frac{4}{3} \frac{GM_1 M_2}{r} e^{-mr} \quad (5.28)$$

qui diffère d'un facteur 4/3 par rapport au potentiel Newtonien lorsque l'on prend $m \rightarrow 0$. Et si on essaye d'absorber ce facteur dans la constante G , on trouve une déviation de la lumière supérieure de 25% à celle de la RG.

La discontinuité de vDVZ suffit à éliminer la théorie de la gravité massive libre, car elle ne vérifie pas les observations standards du système solaire. Cependant, comme l'a fait remarqué Vainshtein, cette discontinuité apparaît dans l'action tronquée à l'ordre quadratique : il faudrait prendre en compte les auto-interactions du graviton pour que les théories massives soient définitivement invalidées. En effet, une telle complétion offre la possibilité de voir la discontinuité être exactement compensée par les non-linéarités : c'est l'essence du mécanisme conjecturée par Vainshtein (voir [9]) qui a montré que les non-linéarités en gravité massive n'étaient plus négligeables en dessous d'un certain rayon $r_V \equiv (r_s \lambda_g)^{1/5}$, où r_s est le rayon de Schwarzschild et $\lambda_g = h/(m_g c)$ est la longueur d'onde de Compton du graviton (ainsi lorsque $m \rightarrow 0$, il n'y a pas de région où la théorie de Fierz-Pauli reste fiable).

Comme une théorie cohérente de la gravité massive est nécessairement non-linéaire à cause de la discontinuité vDVZ, on va maintenant s'intéresser aux complétions à tout ordre de l'action de Fierz-Pauli.

6 Complétions non-linéaires

Nous allons maintenant prendre en compte les possibles auto-interactions du graviton avec lui-même. Nous verrons qu'à partir d'une unique théorie quadratique on trouve une infinité de complétions non-linéaires. Cependant, une analyse hamiltonienne d'un cas particulier nous montrera que ces théories, si elles ouvrent la voie à une possible résorption de la discontinuité vDVZ, possèdent leur propre pathologie : le fantôme de Boulware-Deser.

6.1 Action non-linéaire de la gravité massive

Le moyen le plus simple de compléter l'action de Fierz-Pauli, tout en restant proche de la RG, est de prendre encore une fois le terme cinétique de la RG, en notant $g_{\mu\nu}$ la métrique dynamique,

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{M_P^2}{2} \left(\int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \right) \quad (6.1)$$

et d'ajouter un terme de masse, toujours sans dérivée de la métrique, tel que, développé à l'ordre quadratique, on retrouve le terme de masse de Fierz-Pauli. Si on fait dépendre ce terme uniquement de $g_{\mu\nu}$, la seule possibilité non triviale est un scalaire multiplié par $\sqrt{-g}$: le terme de masse est donc équivalent à la constante cosmologique. Or Λ ne change pas la covariance générale des équations d'Einstein qui continuent à propager 2 degrés de liberté. Il faut donc introduire une métrique de fond supplémentaire $f_{\mu\nu}$, que nous allons prendre ici plate et non dynamique. On va par la suite choisir un terme de masse qui va coupler ces deux métriques, être invariant sous l'action des difféomorphismes communs et être égal au terme de Fierz-Pauli à l'ordre quadratique lorsqu'on perturbe $g_{\mu\nu}$ autour de la métrique de fond fixe. Un tel terme aura la forme générale suivante [4] :

$$\mathcal{S}_{int}[f, g] = -\frac{1}{8} m^2 M_p^2 \int d^4x \sqrt{-g} V(g^{-1}f) \quad (6.2)$$

Il existe ainsi une infinité de théories non-linéaires de la gravité massive. Dans la section suivante, nous prendrons une forme spécifique du potentiel scalaire d'interaction entre les deux métriques, dite de Boulware et Deser :

$$\mathcal{S}_{int}^{BD} = -\frac{1}{8} m^2 M_p^2 \int d^4x \sqrt{-f} h_{\mu\nu} h_{\sigma\tau} (f^{\mu\sigma} f^{\nu\tau} - f^{\mu\nu} f^{\sigma\tau}) \quad (6.3)$$

où l'on a noté $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}$.

On supposera de plus que la matière est uniquement couplée à la métrique $g_{\mu\nu}$. En définitive, l'action totale s'écrit, en explicitant la dépendance à deux métriques différentes, sous la forme générale

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{EH}[g] + \mathcal{S}_{int}[f, g] + \mathcal{S}_{matiere}[g] \quad (6.4)$$

Les équations du mouvement prennent la forme :

$$M_P^2 G_{\mu\nu} = \left(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(massif)} \right) \quad (6.5)$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein, $T_{\mu\nu}$ le tenseur d'énergie-impulsion de la matière tel que défini dans la section 3.2 et $T_{\mu\nu}^{(massif)}$ est le tenseur énergie-impulsion effectif due à la présence du terme de masse supplémentaire :

$$T_{\mu\nu}^{(massif)} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_{int}[f, g]}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (6.6)$$

Par hypothèse, le Lagrangien doit être invariant par difféomorphisme commun des deux métriques. On peut montrer que cela implique la conservation du tenseur d'énergie-impulsion de la matière [4]. Comme le tenseur d'Einstein est lui aussi conservé (identités de Bianchi), on a finalement les 4 contraintes suivantes :

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(massif)} = 0 \quad (6.7)$$

Dans le cas linéaire, une cinquième contrainte permet de réduire le nombre de degrés de liberté à 5. Dans la prochaine section, nous allons voir dans un cas particulier que ce n'est plus le cas et que le sixième degré de liberté est un fantôme qui traduit une instabilité de l'hamiltonien.

6.2 Fantôme de Boulware-Deser

Nous allons étudier plus en détail l'action non-linéaire avec le potentiel de Boulware et Deser (6.3) comme terme de masse et la métrique plate comme métrique de fond. L'action se met alors sous la forme :

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[\sqrt{-g} \mathcal{R} - \frac{m^2}{4} (g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}) (g_{\sigma\tau} - \eta_{\sigma\tau}) [\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\tau} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\tau}] \right] \quad (6.8)$$

En passant au formalisme ADM, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^4x \left[N \left(K^{ij} K_{ij} - K^2 + \mathcal{R}^{(3)} \right) \right. \\ \left. - \frac{m^2}{4} \left(h_{ij} h^{ij} - h_{ii} h_{jj} - 2N_i N_i + 2h_{ii} \left(1 - N^2 + N_k g^{kl} N_l \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

On remarque que la variable N n'est plus un multiplicateur de Lagrange, contrairement à la théorie tronquée à l'ordre quadratique. Il n'y a donc plus de contraintes tertiaire et quaternaire et on s'attend à ce qu'il y ait un degré de liberté supplémentaire.

Précisons la discussion : les moments conjugués sont les mêmes que ceux de la RG (4.22) et l'Hamiltonien canonique s'écrit, en réutilisant les notations (4.26) :

$$\begin{aligned} H_c = \int d^4x \left[N \mathcal{H} + N_i \mathcal{H}^i + \frac{1}{4} m^2 (h_{ij} h_{ij} - h_{ii} h_{jj} + 2h_{ii}) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} m^2 \left(2h_{ii} N_k g^{kl} N_l - 2N_i N_i \right) - \frac{1}{2} m^2 h_{ii} N^2 \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

L'analyse hamiltonienne donne encore les 4 contraintes primaires

$$\Phi^0 = \pi_N = 0, \quad \Phi^i = \pi_{N_i} = 0 \quad (6.11)$$

qui se propagent en 4 contraintes secondaires :

$$\Phi^4 = \mathcal{H} - m^2 h_{kk} N \approx 0 \quad (6.12)$$

$$\Phi^{4+i} = \mathcal{H}^i - m^2 (\eta^{ij} - h_{kk} g^{ij}) N_j \approx 0 \quad (6.13)$$

Ceux-ci ne donnent pas de contraintes supplémentaires car ils ne font que fixer les multiplicateurs de Lagrange de l'Hamiltonien total. Les crochets des contraintes donnent :

$$\{\Phi^0, \Phi^4\} = m^2 h_{kk}, \quad \{\Phi^i, \Phi^{4+j}\} = m^2 (\eta^{ij} - h_{kk} g^{ij}) \quad (6.14)$$

On a donc trouvé 8 contraintes de seconde classe : le Lagrangien possède 6 degrés de liberté, un de plus que sa troncature quadratique. Comme dans le cas $\alpha \neq 1$ de la section 5.3.2, ce degré de liberté qui se propage à l'ordre non-linéaire est appelé un fantôme et traduit la même instabilité : l'Hamiltonien n'est pas borné inférieurement. On peut le voir en résolvant les contraintes, *i.e.*

$$N \approx \frac{\mathcal{H}}{m^2 h_{kk}}, \quad N_i \approx \frac{1}{m^2} (\eta^{ij} - h_{kk} g^{ij})^{-1} \mathcal{H}^i \quad (6.15)$$

dans l'Hamiltonien total :

$$H_T \approx \int d^4x \left[\frac{1}{2m^2} \frac{\mathcal{H}^2}{h_{kk}} + \frac{1}{2m^2} \mathcal{H}^i (\eta^{ij} - h_{kk} g^{ij})^{-1} \mathcal{H}^j + \frac{1}{4} m^2 (h_{ij} h_{ij} - h_{ii} h_{jj} + 2h_{ii}) \right] \quad (6.16)$$

On voit que lorsque \mathcal{H} est gardée finie et que l'on fait tendre inférieurement h vers 0^- , H_T prend des valeurs négatives arbitrairement grandes. L'Hamiltonien n'est pas borné inférieurement ce qui peut entraîner l'apparition de solutions non physiques (solution du vide instable, trajectoires qui divergent etc). Cependant, on peut nuancer le caractère pathologique d'un fantôme : celui-ci peut ne se manifester que sur des distances très petites, on le comprend alors comme étant une manifestation du caractère effectif de la théorie. De plus l'Hamiltonien total est ici calculé en prenant des h_{ij} et π^{ij} quelconques, on pourrait envisager que, en prenant les solutions des équations du mouvement à partir de sources de matière réalistes, les configurations à énergies négatives ne soient pas visitées. Un article récent [21] a montré un lien intéressant entre fantôme et discontinuité vDVZ qui pourrait jouer un rôle dans le mécanisme de Vainshtein : au voisinage d'une source, le fantôme non-linéaire permet d'annuler le mode scalaire qui empêche de retrouver la RG lorsque $m \rightarrow 0$.

Ainsi lorsque la théorie est complétée non-linéairement, les variables N et N_i n'apparaissent plus généralement comme des multiplicateurs de Lagrange. Le nombre de degrés de liberté propagés est donc de 6 et il peut être argumenté que l'Hamiltonien n'est alors pas borné inférieurement [10], ce que nous avons ici vérifié explicitement. Ce sixième degré de liberté, appelé *fantôme de Boulware-Deser*, fut donc longtemps considéré comme inévitable quelque soit le terme de masse considéré et constituait un obstacle certain à la gravité massive non-linéaire. Cependant, des travaux récents ont montré qu'il est possible de construire des théories sans fantôme (voir la théorie dRGT [11]), qui ne résolvent pas pour autant tous les problèmes de la gravité massive.

Troisième partie

Ondes gravitationnelles en gravité massive

Avec la découverte du mécanisme de Vainshtein et la possibilité de construire des théories sans fantôme, la gravité massive est devenue une alternative sérieuse à la RG ouvrant la possibilité d'être testée expérimentalement, ce que l'absence d'un cadre théorique cohérent empêchait jusqu'à présent. Plusieurs travaux ont commencé à proposer une majoration de la masse du graviton en se basant sur des considérations phénoménologiques (potentiel de Yukawa, propagation modifiée du graviton...) dans le système solaire, la dynamique des galaxies ou encore la propagation sur des distances cosmologiques. Cependant encore très peu d'études rigoureuses ont été menées en raison principalement des difficultés théoriques encore irrésolues et de la complexité des calculs dans les systèmes intéressants.

Dans ce mémoire nous nous intéresserons plus particulièrement au sujet des ondes gravitationnelles qui sont devenues un domaine de recherche très actif ces dernières années avec la construction des interféromètres LIGO et VIRGO. Ces ondes ouvrent de nouvelles possibilités expérimentales dans un régime jusqu'alors difficile d'accès avec les ondes électromagnétiques : le régime des champs forts et non-linéaires. Les ondes gravitationnelles permettent de sonder une très large gamme de phénomènes, allant de l'inflation aux trous noirs, en passant par les systèmes binaires, et permettent des observations extrêmement précises en se basant sur des phénomènes périodiques.

Nous allons commencer par rappeler quelques résultats utiles de RG, puis nous discuterons des corrections phénoménologiques induites par la masse du graviton. En dernière partie, nous développerons l'exemple des systèmes binaires compacts en partant de la relation de dispersion d'une théorie massive quadratique dans un espace en expansion.

7 Rappels de quelques résultats classiques de RG

Nous allons d'abord donner quelques résultats de RG comme point de départ pour l'étude des ondes gravitationnelles en gravité massive. Ceci permettra de présenter les phénomènes de propagation, de polarisation et de détection des ondes et montrera les difficultés à étendre ces calculs aux théories de la gravité massive. De plus, l'ajout d'une masse au graviton dans l'étude des systèmes binaires compacts apparaîtra sous la forme d'un terme correctif supplémentaire aux équations d'ondes calculées en RG.

Nous commencerons par rappeler deux jauges particulièrement utiles dans l'étude des ondes gravitationnelles, puis nous nous intéresserons à leur détection à l'aide d'un anneau de particules au repos (voir le livre de Maggiore [22] pour une présentation claire et exhaustive du sujet).

7.1 Jauge transverse sans trace

On a vu que pour les champs faibles, où l'on peut négliger les termes non-linéaires, les équations d'Einstein peuvent s'écrire dans la jauge harmonique sous la forme (2.14). Dans le vide, les équations du mouvement et les contraintes sont

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (7.1)$$

On remarque par ailleurs que la jauge harmonique ne fixe pas complètement le système de coordonnées. Il est encore possible de faire la transformation de jauge :

$$\bar{h}^{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}^{\mu\nu} + \partial^{(\mu} \xi^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda \quad (7.2)$$

avec ξ^μ qui doit satisfaire l'équation d'onde $\square \xi^\mu = 0$.

Pour manipuler plus facilement cette jauge, nous allons décomposer le champ $\bar{h}^{\mu\nu}$ en ondes monochromatiques :

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = \int d^4k A^{\mu\nu}(k) e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (7.3)$$

En substituant (7.3) dans l'équation d'onde (7.1), on obtient les deux conditions : $k^\mu k_\nu = 0$ et $A^{\mu\nu} k_\nu = 0$. La première condition nous dit que le vecteur d'onde est de genre lumière et que les ondes gravitationnelles se propagent à la vitesse de la lumière. La deuxième condition signifie que l'amplitude de l'onde gravitationnelle est orthogonale au quadrivecteur d'onde.

On écrit également la transformée de Fourier du vecteur de jauge :

$$\xi^\mu(x) = \int d^4k \tilde{\xi}^\mu(k) e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (7.4)$$

Nous pouvons maintenant fixer la jauge telle que pour un observateur de quadrivecteur vitesse u^μ (de type temps et donc non orthogonal à k^μ de type lumière) détectant l'onde gravitationnelle, l'amplitude satisfait en plus de la condition de transversalité avec k^μ ,

$$A^{\mu\nu} u_\nu = 0, \quad A = \eta_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = 0 \quad (7.5)$$

qui sont respectivement la *condition de transversalité* à u^μ et la *condition sans trace*. Cette jauge est appelée *jauge transverse et sans trace* (TT). On peut la construire explicitement à partir d'une onde d'amplitude $A^{\mu\nu}$ dans une jauge harmonique et d'un quadrivecteur vitesse u^μ quelconques⁶. On remarque par ailleurs que la condition sans trace implique que $\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}$. On va maintenant expliciter la forme de l'onde gravitationnelle dans le référentiel propre d'un observateur, *i.e.* $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Les contraintes se réécrivent alors :

$$h_{00}^{TT} = h_{0i}^{TT} = 0, \quad \square h_{ij}^{TT} = 0, \quad \partial^j h_{ij}^{TT} = 0, \quad h_{ii}^{TT} = 0. \quad (7.7)$$

Si on oriente les axes tel que l'onde se propage suivant l'axe z , la matrice h_{ij}^{TT} est fonction du temps retardé $t - z/c$ et s'écrit sous la forme simple suivante (en oubliant les parties statiques de l'onde)

$$\boxed{h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+(t - z/c) & h_\times(t - z/c) & 0 \\ h_\times(t - z/c) & -h_+(t - z/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad (7.8)$$

où h_+ et h_\times sont 2 fonctions arbitraires qui correspondent aux deux états de polarisation des ondes gravitationnelles en RG (voir la figure 3). C'est les 2 degrés de liberté trouvés dans l'analyse hamiltonienne 4.

Que se passe-t-il en gravité massive ? Comme on l'a vu dans la section 5, le système de coordonnées est celui d'une jauge harmonique, avec l'amplitude de l'onde qui est transverse à sa direction de propagation, et la trace de l'onde est nulle. Seulement, on ne peut plus exiger que l'amplitude soit transverse au quadrivecteur vitesse de l'observateur. Les contraintes n'éliminent alors que 5 composantes de l'amplitude : il reste donc 5 polarisations différentes d'une onde en gravité massive.

Nous avons donc vu qu'il existe en RG une jauge particulière (*i.e.* un système de coordonnées) où les ondes gravitationnelles prennent la forme extrêmement simple de (7.8). Cependant notre objectif maintenant va être de détecter ces ondes. Le moyen le plus simple est d'observer le mouvement d'une masse test initialement au repos et soumis à une perturbation de la métrique. Pour cela nous allons considérer une masse test initialement au repos dans le système de coordonnées TT et considérer son équation géodésique

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt} = 0 \quad (7.9)$$

6. Le vecteur jauge $\tilde{\xi}^\mu$ est relié à l'amplitude $A^{\mu\nu}$ et au quadrivecteur vitesse u^μ par la formule :

$$\tilde{\xi}^\mu = \frac{i}{k_\sigma u^\sigma} \left[\bar{A}^{\mu\nu} u_\nu - \frac{k^\mu}{2} \frac{\bar{A}^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta}{k_\lambda u^\lambda} \right] \quad (7.6)$$

où l'on a noté $\bar{A}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} A$.

On regarde ce qui se passe à l'instant $\tau = 0$ où $dx^i/d\tau = 0$ par hypothèse :

$$\left(\frac{d^2x^i}{d\tau^2}\right)_{\tau=0} = - \left[\Gamma^i{}_{00} \left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 \right]_{\tau=0} \quad (7.10)$$

En utilisant l'expression des symboles de Christoffel (2.2) et les contraintes de la jauge TT (7.7), on obtient :

$$\left(\frac{d^2x^i}{d\tau^2}\right)_{\tau=0} = - \left[\left(\partial_0 h_{0i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \right) \left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 \right]_{\tau=0} = 0 \quad (7.11)$$

À $\tau = 0$, on a donc les vitesse et accélération de la masse qui sont nulles, ce qui montre que la vitesse va rester nulle pour les temps postérieurs. *Une masse initialement au repos dans le référentiel TT restera au repos lors du passage de l'onde gravitationnelle. A fortiori*, la distance entre 2 masses initialement au repos est donc conservée, ce qui peut paraître étonnant : le système de coordonnées est choisi spécifiquement pour que ce soit le cas. L'effet physique des ondes gravitationnelles s'observent seulement lorsqu'on considère les distances propres.

Si les ondes prennent une forme particulièrement simple dans la jauge TT, ce n'est généralement pas le référentiel dans lequel va être décrit un détecteur dans un laboratoire. Nous allons donc introduire un nouveau système de coordonnées pour décrire le référentiel propre du détecteur.

7.2 Coordonnées de Fermi

Dans le référentiel d'un détecteur, on va généralement repérer les positions, non par des particules en chute libre comme dans la jauge TT, mais en utilisant des règles rigides et une masse qui joue le rôle d'origine. On s'attend alors à ce qu'une masse test libre ait une position qui change au passage d'une onde gravitationnelle. Le laboratoire le plus simple conceptuellement est celui où le détecteur est en chute libre (ce sera par exemple le cas de l'interféromètre spatial LISA) : les masses suivent alors des géodésiques voisines.

Un système de coordonnées particulièrement adapté à la description du voisinage d'une géodésique \mathcal{L}_0 est le système de *coordonnées* dit *de Fermi* : nous allons voir qu'il permet de décrire l'effet des ondes gravitationnelles sur le détecteur de manière quasi-newtonienne.

Le principe d'équivalence nous dit qu'il est possible de construire en chaque point \mathbf{P} un système de coordonnées localement inertiel : la métrique est plate à l'ordre linéaire au voisinage de ce point et tous les symboles de Christoffel s'annulent $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(\mathbf{P}) = 0$. Ce système de coordonnées est appelé en mathématiques *coordonnées normales de Riemann* et c'est un exercice classique en RG de les construire explicitement à partir des géodésiques. Les coordonnées de Fermi permettent d'étendre ce référentiel localement inertiel au point \mathbf{P} à toute une géodésique \mathcal{L}_0 qu'on prendra comme étant la ligne géodésique d'une masse centrale au repos passant par \mathbf{P} . Plus précisément, un système de coordonnées de Fermi $X^\mu = (cT, \mathbf{X})$ avec T un certain paramètre le long de la géodésique et les coordonnées spatiales $X^i = 0$ sur la géodésique, vérifie au voisinage de \mathcal{L}_0 :

$$g_{\mu\nu}(T, \mathbf{X}) = \eta_{\mu\nu} + F_{ij\mu\nu}(T)X^iX^j + \mathcal{O}(|\mathbf{X}|^3) \quad (7.12)$$

où les $F_{ij\mu\nu}(T)$ sont des fonctions du temps dans les coordonnées de Fermi. Un tel référentiel peut être obtenu explicitement mais la construction est plus délicate [22]. Ce référentiel correspond en fait à ce qui se rapproche le plus de l'idée intuitive de l'ascenseur d'Einstein, *i.e.* au référentiel en chute libre où les effets de la gravité disparaissent tout le long de la trajectoire.

Dans ce système de coordonnées, on a la métrique qui vérifie au voisinage de la géodésique \mathcal{L}_0 de la "masse centrale" du détecteur, même en présence d'ondes gravitationnelles,

$$ds^2 = -c^2dT^2 + \delta_{ij}dX^i dX^j + \mathcal{O}(h^2) \quad (7.13)$$

Il n'y a pas de corrections à l'ordre linéaire par construction du système de coordonnées (7.12). En utilisant le fait que les symboles de Christoffel s'annulent sur la géodésique, on peut trouver les corrections à l'ordre deux en terme du tenseur de Riemann :

$$ds^2 \approx -c^2 dT^2 [1 + R_{0i0j} X^i X^j] - 2cdT dX^i \left(\frac{2}{3} R_{0jik} X^j X^k \right) + dX^i dX^j \left[\delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ijkl} X^k X^l \right] \quad (7.14)$$

Le passage des ondes gravitationnelles se manifeste donc à travers les tenseurs de Riemann et les effets apparaissent à l'ordre $\mathcal{O}(r^2)$.

Nous allons maintenant calculer l'accélération d'une masse au voisinage de la masse centrale décrivant une géodésique \mathcal{L} séparée de \mathcal{L}_0 par le vecteur spatial $\xi^i(T)$. On a alors dans le système de coordonnées de Fermi :

$$\frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{\nu\rho} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} = -\xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^i_{\nu\rho} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} \quad (7.15)$$

Comme le détecteur ne se déplace pas à des vitesses relativistes, on peut négliger $d\xi^i/d\tau$ par rapport à $d\xi^0/d\tau$. En utilisant que sur la géodésique \mathcal{L}_0 , $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$ et $\partial_0 \Gamma^i_{0j} = 0$, on a $R^i_{0j0} = \partial_j \Gamma^i_{00} - \partial_0 \Gamma^i_{0j} = \partial_j \Gamma^i_{00}$, on obtient :

$$\frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} = -R^i_{0j0} \xi^j \left(\frac{d\xi^0}{d\tau} \right)^2 \quad (7.16)$$

7.3 Détection des ondes gravitationnelles : polarisations rectilignes + et \times

Nous allons maintenant étudier la réponse du détecteur au passage d'une onde gravitationnelle $h^{\mu\nu}$. On suppose que les masses qui composent ce détecteur sont initialement au repos. Ils acquièrent une vitesse $dX^i/d\tau = c\mathcal{O}(h)$ après le passage de l'onde. On a donc

$$dT^2 = d\tau^2 \left[1 + \frac{1}{c^2} \frac{dX^i}{d\tau} \frac{dX^j}{d\tau} \right] = d\tau^2 [1 + \mathcal{O}(h^2)] \quad (7.17)$$

Les masses n'étant soumises qu'aux ondes gravitationnelles, $R^i_{0j0} = \mathcal{O}(h)$ et à l'ordre linéaire en h , on a :

$$\ddot{\xi}^i = -c^2 R^i_{0j0} \xi^j \quad (7.18)$$

Il s'agit maintenant de calculer le tenseur de Riemann en présence d'ondes gravitationnelles dans le référentiel de Fermi du détecteur. Pour cela, on remarque que le tenseur de Riemann linéarisé

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho h^\mu_{\sigma} + \partial^\mu \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial^\mu \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h^\mu_{\rho}) \quad (7.19)$$

est invariant sous l'action linéarisée des difféomorphismes (2.10). On peut donc choisir la jauge dans laquelle on le calcule. En partant de la jauge TT, on trouve finalement :

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}^{TT}_{ij} \xi^j \quad (7.20)$$

Dans le référentiel propre du détecteur, l'effet de l'onde gravitationnelle sur une masse m ponctuelle peut être modélisé par une force newtonienne :

$$\boxed{F_i = \frac{m}{2} \ddot{h}^{TT}_{ij} \xi^j} \quad (7.21)$$

On regarde maintenant l'effet d'une onde gravitationnelle sur un détecteur. Pour cela nous allons considérer un anneau de particules sans interaction initialement au repos sur un cercle de rayon R dans le plan (XY) et soumis à l'action d'une onde gravitationnelle monochromatique de pulsation ω se propageant dans la direction Z .

D'après le paragraphe 7.1, la perturbation est de la forme :

FIGURE 3 – Polarisation rectilignes + et ×

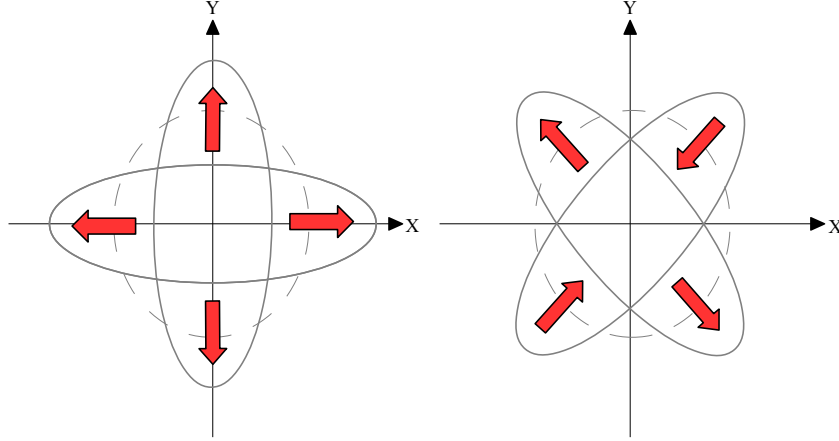
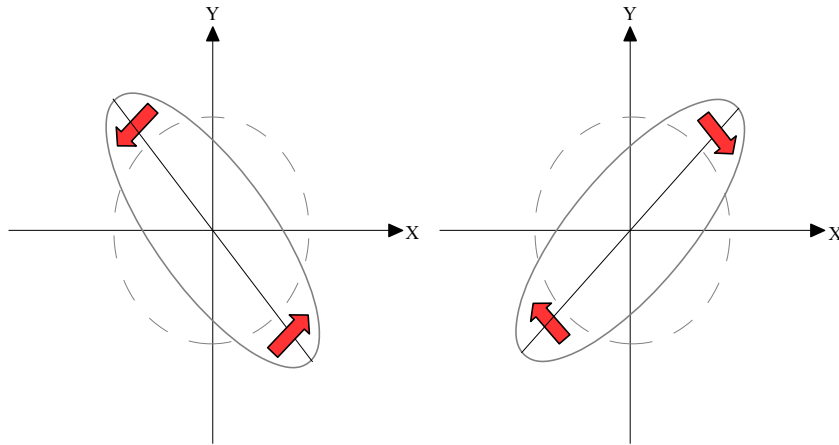


FIGURE 4 – Polarisation circulaires droite et gauche



$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} A_+ \cos(\omega T) & A_\times \cos(\omega T) & 0 \\ A_\times \cos(\omega T) & -A_+ \cos(\omega T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

L'anneau initialement circulaire est alors déformé en une "ellipse pulsante" sous l'action d'une onde gravitationnelle rectiligne, et une "ellipse tournante" dans le cas d'une onde circulaire.

Pour $A_+ = A$ et $A_\times = 0$, *i.e.* la polarisation rectiligne +, on obtient l'équation de l'ellipse :

$$\left(\frac{X}{1 + \frac{A}{2} \cos \omega T} \right)^2 + \left(\frac{Y}{1 - \frac{A}{2} \cos \omega T} \right)^2 = R^2 \quad (7.23)$$

Pour $A_+ = 0$ et $A_\times = A$, *i.e.* la polarisation rectiligne × :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{X + Y}{1 + \frac{A}{2} \cos \omega T} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{X - Y}{1 + \frac{A}{2} \cos \omega T} \right)^2 = R^2 \quad (7.24)$$

8 Aspects phénoménologiques de la gravité massive

En l'absence d'une action de la gravité massive cohérente dans le régime des champs forts, sans fantôme non-linéaire et gardant des domaines calculables intéressants, il est difficile d'étudier rigoureusement les propriétés de ces théories. Cependant, de nombreux travaux ont cherché à examiner certains

aspects phénoménologiques qui découlent de l'ajout d'une masse au graviton. Ces travaux portent sur deux modifications importantes de la RG : les lois de Newton et les ondes gravitationnelles. On notera dans toute cette section $m_g \neq 0$ la masse du graviton et $\lambda_g = h_P/(m_g c) < \infty$ sa longueur de Compton, où $h_P \approx 6,62 \times 10^{-34} \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ est la constante de Planck.

La première de ces modifications déjà évoquée dans le paragraphe 5.1, les lois de Newton, se base sur le potentiel de Yukawa $GM \exp(-r/\lambda_g)/r$ qui remplace le potentiel classique de Newton GM/r dans la zone proche, non-radiative, de la source. On peut alors majorer la masse du graviton en observant la dynamique du système solaire où dans la limite $\lambda_g \ll r$, on peut écrire :

$$F(r) = -\frac{d}{dr} \left(\frac{GM}{r} e^{-r/\lambda_g} \right) \approx \frac{GM}{r^2} \left[1 + \left(\frac{r}{\lambda_g} \right)^2 \right] \quad (8.1)$$

La gravité massive se manifeste sous la forme d'une *cinquième force* qui apparaît comme une correction à la force gravitationnelle à l'ordre $(r/\lambda_g)^2$. L'article [12] trouve que la meilleure majoration, en exploitant les données déjà connues du système solaire, est donnée en vérifiant la troisième loi de Kepler de la planète Mars $\lambda_g > 2,8 \times 10^{12} \text{ km}$, soit $m_g < 4,4 \times 10^{-22} \text{ eV}$, encore très au-dessus des valeurs considérées pour expliquer l'accélération de l'expansion de l'Univers $m_g \sim 10^{-30} - 10^{-33} \text{ eV}$. D'autres travaux ont également avancé une majoration beaucoup plus petite de $m_g < 2,2 \times 10^{-29} \text{ eV}$ à partir de l'observation de la dynamique des galaxies. Cependant, en l'absence d'une théorie rigoureuse qui allie gravité massive et modèle cosmologique et eu égard aux incertitudes liées à la présence supplémentaire de matière noire, ce résultat ne peut être considéré qu'à titre indicatif.

L'autre de ces modifications concerne les ondes gravitationnelles. Il a déjà été fait remarqué dans le paragraphe 7.1 que la gravité massive propageait cinq polarisations différentes, trois de plus que celles de la RG. La détection de polarisations supplémentaires serait une preuve que la RG est incomplète mais ne mènerait pas exclusivement à la gravité massive. De plus, certains arguments mettent en doute la possibilité de les détecter (voir la section 11 de [4]) : un phénomène physique qui produit une grande quantité d'ondes gravitationnelles doit inclure une source très dense où on peut s'attendre à ce qu'un mécanisme de Vainshtein gomme les degrés de liberté additionnels. Les trois polarisations supplémentaires seraient alors négligeables par rapport aux deux modes de la RG et on s'attend à ce que les ondes gravitationnelles soient indistinguables de ceux de la RG pour des distances inférieures à la longueur de Compton du graviton (avant que des effets dispersifs n'entrent en jeu). Cependant, ces polarisations pourraient jouer un rôle plus important dans d'autres phénomènes, comme les lentilles gravitationnelles faibles et les trous noirs.

Une autre modification attendue concerne la vitesse de propagation des ondes gravitationnelles, différente de celle de la RG. En effet, l'équation de Klein-Gordon présentée dans la section 5.1 donne une vitesse v_g du graviton, dans un référentiel localement inertiel :

$$\frac{v_g^2}{c^2} = 1 - \frac{m_g^2 c^4}{E^2} \quad (8.2)$$

où m_g est la masse inerte du graviton et E son énergie. Le moyen le plus simple de tester cette vitesse est de comparer les temps d'arrivées des ondes électromagnétiques et des ondes gravitationnelles d'un même évènement, par exemple une supernova située à grande distance. Un test plus sophistiqué et qui ne dépend plus d'hypothèses sur le photon (notamment sa masse nulle et donc sa vitesse égale à c) se base sur la dépendance en fréquence de la vitesse de propagation des ondes gravitationnelles, comme on le voit en remplaçant E par $h_P f_g$. Les ondes de hautes fréquences auront des vitesses de propagation plus grandes que celles de basses fréquences : ainsi, dans un phénomène où la fréquence varie au cours du temps, l'onde va se déformer le long de sa trajectoire. Un exemple d'un tel processus ayant été beaucoup étudié en RG, est le système compact binaire spiralé. Celui-ci dépend d'un petit nombre de paramètres qui peuvent être mesurés très précisément, ce qui permet d'avoir un schéma d'onde théorique très précis avec lequel comparer le signal obtenu expérimentalement. Nous allons nous intéresser de plus près à un tel système.

Remarque : il faudra dans nos calculs des systèmes binaires faire l’hypothèse que la masse m_g du graviton est plus petite que $m_g < 10^{-21}$ eV, majoration déjà obtenue dans le système solaire. Cependant, des études plus précises devront faire attention en comparant ces deux majorations : une discussion devrait se baser sur une théorie de la gravité massive pouvant à la fois faire des prédictions en champ proche et en champ radiatif (le facteur numérique devant λ_g pourrait être par exemple différent entre le potentiel de Yukawa et la relation de dispersion).

9 Cas d’un système binaire compact spiralé

Un système binaire compact spiralé est un système composé de deux objets compacts, étoiles à neutron ou trous noirs, qui gravitent l’un autour de l’autre en accélérant et forment une trajectoire en spirale, avant de fusionner (phénomène de *coalescence*). Ces systèmes ont l’avantage d’être des sources très ”propres” d’ondes gravitationnelles qui sont déterminées de manière très précise, à plusieurs ordres *Post-Newtonien* (noté PN, avec $1 \text{ PN} = \mathcal{O}\left((v/c)^2\right)$), par un petit nombre de paramètres : la localisation de la source, son orientation, le temps et la phase au moment de la coalescence, la masse des deux objets et leur spins. On peut par ailleurs supposer généralement que leur orbite est circulaire (les pertes d’énergie par émission d’ondes gravitationnelles entraînent une diminution très rapide de l’excentricité) et l’effet des spins peut être négligé pour un développement inférieur à 2 PN. De plus, le nombre élevé de cycles et la haute prédictibilité de la forme des ondes gravitationnelles rendent la technique du *matched filtering* (comparaison de l’onde mesurée avec l’onde théorique) particulièrement efficace (voir [14] pour une discussion détaillée sur les ondes des systèmes binaires en RG).

Nous allons ici reprendre l’article de C. M. Will [15] en proposant une justification de la relation de dispersion utilisée. Nous supposons que la seule correction de la forme des ondes gravitationnelles d’un système binaire due à l’ajout d’une masse au graviton provient de la propagation des gravitons de la source jusqu’à nous. Pour cela, il faudra choisir des sources éloignées pour que l’effet dispersif soit suffisamment grand pour être détectable, et donc typiquement chercher des sources à des distances cosmologiques ($d > 1 \text{ Mpc}$), où l’expansion de l’Univers n’est plus négligeable. Nous allons commencer par calculer, en partant de l’action d’un graviton massif libre en espace courbe, une nouvelle équation d’onde. De là, on pourra, en faisant les approximations nécessaires, aboutir à une relation de dispersion particulièrement simple qui nous servira à relier l’intervalle de temps d’émission et d’observation de deux gravitons. Cette relation sera ensuite injectée dans la forme de l’onde en RG d’un système binaire compact développée à l’ordre 1,5 PN. La masse du graviton apparaîtra alors comme un terme correctif dans la phase de l’onde et nous donnerons alors les majorations théoriques qu’on pourrait obtenir avec les interféromètres terrestres LIGO-VIRGO et spatiale LISA.

9.1 Action dans un espace courbe

Jusqu’à présent, nous avons constamment supposé que la métrique de fond était plate. Cependant, lors de l’étude de la propagation d’un graviton sur des distances cosmologiques, on ne peut plus négliger la courbure à grande échelle de l’Univers. Il est donc nécessaire de réécrire une nouvelle action en espace courbe.

Nous allons pour cela étudier l’action d’un graviton massif libre dans un espace muni d’une métrique de fond courbe $g_{\mu\nu}$. Comme pour l’action de Fierz-Pauli, on part d’un terme cinétique qui est le développement à l’ordre quadratique de l’action d’Hilbert-Einstein dans un espace courbe (où il faut prendre en compte la constante cosmologique) $\sqrt{-g}(R - 2\Lambda)$, auquel on ajoute le même terme de masse qu’en métrique plate (attention : ce terme n’a qu’en apparence la même forme, car les indices sont maintenant levés et baissés avec la métrique de fond courbe, en particulier ici il n’y a pas de

fantôme) et le couplage avec la matière est minimal. Après calcul, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = M_p^2 \int d^4x \sqrt{-g} & \left[\left(-\frac{1}{4} \nabla_\mu h_{\nu\rho} \nabla^\mu h^{\nu\rho} + \frac{1}{4} \nabla_\mu h \nabla^\mu h - \frac{1}{2} \nabla_\mu h \nabla^\nu h_\nu{}^\mu + \frac{1}{2} \nabla_\mu h_{\nu\rho} \nabla^\nu h^{\mu\rho} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\Lambda}{2} \left(h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^2 \right) - \frac{1}{4} m_g^2 (h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^2) + M_p^{-2} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (9.1)$$

où la métrique de fond doit être solution d'un espace d'Einstein, *i.e.* vérifier (2.5) en l'absence de matière, ce qui donne

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{4} g_{\mu\nu}, \quad \Lambda = \frac{R}{4}$$

Dans le vide, on a les équations du mouvement :

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R h_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} h - m_g^2 h_{\mu\nu} + m_g^2 g_{\mu\nu} h \quad (9.2)$$

où

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \nabla_\gamma \nabla^\gamma h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu h - 2 \nabla_\sigma \nabla_{(\mu} h^{\sigma}{}_{\nu)} + g_{\mu\nu} \left(\nabla^\alpha \nabla^\beta h_{\alpha\beta} - \nabla^\rho \nabla_\rho h \right) \quad (9.3)$$

Comme dans le cas de l'action de Fierz-Pauli, on trouve les 5 contraintes [5] :

$$\nabla^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 \quad (9.4)$$

L'action (9.1) possède bien 5 degrés de liberté. L'équation de propagation est obtenue en faisant disparaître les contraintes de (9.2) :

$$\boxed{\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R h_{\mu\nu} - m_g^2 h_{\mu\nu} = 0} \quad (9.5)$$

où $\square = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$ est le d'Alembertien en espace courbe.

9.2 Relation de dispersion dans un espace FLRW

Nous allons maintenant étudier la propagation d'un graviton massif dans une espace de fond de type Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre (FLRW), qui décrit la géométrie moyenne aux grandes échelles d'un espace homogène et isotrope. Pour des raisons de simplicité, nous allons nous placer dans un espace plat ($k = 0$) et utiliser les unités naturelles $c = \hbar = 1$. La métrique peut s'écrire :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (9.6)$$

Nous commençons par étudier les équations du mouvement dans le vide (9.5) avec une métrique de fond FLRW afin d'obtenir une relation de dispersion pour les gravitons.

Par un calcul similaire à celui de la RG, nous nous placerons provisoirement dans la métrique

$$ds^2 = \check{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -a(\eta)^2 d\eta^2 + a(\eta)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (9.7)$$

où l'on a renormalisé le temps, afin d'identifier les termes négligeables. Les symboles de Christoffels et le tenseur de Ricci vérifient alors les relations symétriques très simples suivantes :

$$\check{\Gamma}_{00}^i = \check{\Gamma}_{i0}^0 = \check{\Gamma}_{0i}^0 = \check{\Gamma}_{jk}^i = 0, \quad \check{\Gamma}_{00}^0 = \check{\Gamma}_{j0}^i = \check{\Gamma}_{0j}^i = \check{\Gamma}_{ij}^0 = \frac{a'}{a} \delta_{ij}, \quad \check{R} = 6 \frac{a''}{a^3} \quad (9.8)$$

Les équations (9.5), lorsqu'on développe le d'Alembertien courbe, donnent des équations du mouvement mixtes compliquées. Par exemple, pour h_{00} :

$$\partial^\gamma \partial_\gamma h_{00} + 2 \frac{a'}{a^3} \partial_0 h_{00} - 4 \frac{a'}{a^3} \partial_i h_{0i} + 2 \frac{a'^2}{a^4} h_{ii} + 4 \frac{\dot{a}^2}{a^4} h_{00} + 5 \frac{a''}{a^3} h_{00} = m_g^2 h_{00} \quad (9.9)$$

Nous cherchons une solution du type onde sphérique $h_{\mu\nu}(x) = A^{p_\sigma x^\sigma} / (a(\eta)r)^3$. On suppose que $a'/a \sim \eta^{-1}$, ce qui correspond à l'hypothèse d'un Univers dominé par la matière (voir [22] pour une discussion plus détaillée). On peut poser $a(\eta_0) = 1 \sim 1$ (où η_0 correspond au temps conforme actuel) et $\eta = T/a(\eta_0) \sim 10^{10}$ années lumières. Le masse m_g doit alors vérifier $(m_g \eta_0 a(\eta_0))^2 \gg 1$, pour ne pas que son effet sur la propagation du graviton soit effacé par la déformation de l'onde le long de sa trajectoire, soit $m_g \gg 1/\eta_0 \sim 10^{-32}$ eV. Les équations du mouvement se réduisent alors à $(\partial^\sigma \partial_\sigma - m_g^2) h_{\mu\nu} = 0$ qui donnent, en passant en Fourier, la relation de dispersion simple suivante :

$$\boxed{p^2 + m_g^2 = 0} \quad (9.10)$$

9.3 Retard dans la propagation de l'onde

On s'intéresse maintenant à la propagation radiale d'un graviton de quadrivecteur impulsions p^μ , du point de coordonnées $(t_e, r_e, 0, 0)$ jusqu'au point de détection en $(t_o, 0, 0, 0)$. On a $p^\mu = (E, p^r, 0, 0)$, où $E = p^0$ est l'énergie du graviton. D'après la relation de dispersion (9.10), on a

$$m_g^2 = -g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = E^2 - a(t)^2 p^{r2} \quad (9.11)$$

et en se souvenant que $p^\mu = mu^\mu = m(dx^\mu/d\tau)$, on obtient

$$\frac{dx^r}{dt} = \frac{p^r}{p^0} = -\frac{1}{a(t)} \left(1 + \frac{m_g^2}{a^2 p^{r2}} \right)^{-1/2} \quad (9.12)$$

que l'on peut développer à l'ordre $(m_g/E_e)^2$ (on a $(m_g/E_e)^2 \sim 10^{-11}$ pour les systèmes considérés). On reprend ici l'hypothèse, non encore démontrée, faite dans l'article [15] que p^r est constante tout au long de la trajectoire. Après intégration :

$$r_e = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} - \frac{1}{2} \frac{m_g^2}{a^2(t_e) E_e^2} \int_{t_e}^{t_o} a(t) dt \quad (9.13)$$

Nous allons maintenant considérer notre système binaire fixe à la distance radiale r_e ⁷. Soient deux gravitons émis aux temps t_e et t'_e avec des fréquences respectives f_e et f'_e (on rappelle que $m_g/E_e = 1/(\lambda_g f_e)$) et qui sont détectés au temps t_o et t'_o . La comparaison de (9.13) entre les deux gravitons donne :

$$\int_{t'_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t'_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{2\lambda_g^2} \int_{t_e}^{t_o} a(t) dt \left(\frac{1}{f_e^2} - \frac{1}{f'_e{}^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta t_e \frac{\dot{a}}{a}) \quad (9.16)$$

et en supposant de plus que $\Delta t_e \equiv t_e - t'_e \ll a/\dot{a}$, on obtient la relation entre les intervalles de temps de détection et d'émission :

$$\boxed{\Delta t_o = (1 + Z) \left[\Delta t_e + \frac{D}{2\lambda_g^2} \left(\frac{1}{f_e^2} - \frac{1}{f'_e{}^2} \right) \right]} \quad (9.17)$$

7. Lorsqu'on note u^μ le quadrivecteur vitesse d'une masse dans le système de coordonnées (t, r, θ, ϕ) , on remarque qu'en utilisant l'équation géodésique :

$$\frac{d|\mathbf{u}|}{dt} = \frac{1}{2|\mathbf{u}|} \frac{d|\mathbf{u}|^2}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a} |\mathbf{u}| \quad (9.14)$$

où $|\mathbf{u}|^2 = g_{ij} u^i u^j$ est le module au carré de la vitesse spatiale de la particule. Si à l'instant $t = t_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, alors par intégration :

$$|\mathbf{u}(t)| = \frac{a(t_0)}{a(t)} |\mathbf{u}_0| \quad (9.15)$$

Si à l'instant t_0 , la masse est au repos dans le référentiel FLRW, alors elle reste au repos malgré l'expansion de l'Univers, d'où le nom de *comoving coordinates*. En fait, (9.15) implique même le résultat plus fort suivant : dans un Univers en expansion infini, toutes les masses, indépendamment de leurs vitesses initiales, vont finir par être au repos par rapport à l'observateur dans ces coordonnées.

où l'on a posé $Z \equiv a(t_0)/a(t_e) - 1$ le redshift cosmologique habituel et

$$D \equiv \frac{1+Z}{a(t_0)} \int_{t_e}^{t_0} a(t) dt \quad (9.18)$$

9.4 Modification de la phase des ondes gravitationnelles

Nous pouvons désormais nous intéresser à la forme des ondes gravitationnelles d'un système binaire compact à des distances cosmologiques. Pour cela nous allons faire un certain nombre d'hypothèses et d'approximations. L'onde détectée sur Terre par un interféromètre peut s'écrire sous la forme :

$$h(t) = A(t)e^{-i\Phi(t)}, \quad \Phi(t) = \Phi_c + 2\pi \int_{t_c}^t f(t) dt \quad (9.19)$$

où $f(t)$ est la fréquence observée de l'onde et Φ_c et t_c correspondent à la phase et au temps lors de la coalescence des deux objets. Nous allons supposer connu que les détecteurs sont beaucoup plus sensibles à la phase de l'onde qu'à son amplitude, qu'on peut donc approximer à l'ordre le plus bas 0 PN de la RG (*i.e.* l'approximation quadrupolaire). L'ajout d'une masse au graviton ne modifie pas l'amplitude, car elle intervient au niveau de la source à un ordre PN plus élevé qui sera discuté plus tard, et la propagation de l'onde jusqu'à la source ne déforme pas l'amplitude avec l'approximation discutée au paragraphe 9.2. La correction de la gravité massive apparaîtra donc dans la phase de l'onde.

Nous allons supposer que la dynamique de la source est celle de la RG avec des corrections dues au potentiel de Yukawa, qui sont de l'ordre $(r/\lambda_g)^2$ d'après (8.1), et qu'un mécanisme de Vainshtein gomme les polarisations supplémentaires (qui pourraient avoir d'autres effets sur l'orbite). Dans le calcul de la phase de l'onde, nous allons inclure les développements jusqu'à l'ordre 1,5 PN en RG en supposant que les orbites sont circulaires et qu'il n'y a pas d'effets de spin. Pour que la dynamique de la source soit celle de la RG à l'ordre $(v/c)^3$, la cinquième force de Yukawa doit vérifier $r^2\lambda_g^{-2}c^3v^{-3} \ll 1$. Pour une orbite circulaire $v^2 \sim m/r$ et les vitesses typiques des systèmes considérés supérieures à $10^{-2}c$, on trouve la condition $\lambda_g > 10^{12}$ km, déjà vérifiée grâce à la majoration obtenue dans le système solaire (voir la remarque du paragraphe 8). L'article [23] propose un développement à un ordre PN supérieur en incluant les effets de spin, sans tenir compte des corrections de type Yukawa qui pourraient éventuellement survenir au niveau de la source. La justification à l'ordre 1,5 PN nous paraît déjà assez faible pour ne pas s'aventurer à faire des calculs plus compliqués.

Les ondes gravitationnelles du système compact binaire sont donc, avec nos hypothèses et à l'ordre considéré, les mêmes que ceux de la RG au niveau de la source. Nous allons maintenant nous intéresser à la propagation de ces ondes du système binaire situé à une distance cosmologique jusqu'à la Terre. L'Univers est, à première approximation, homogène et isotrope à cette échelle et nous allons utiliser les résultats obtenus dans la métrique FLRW. Comme la fréquence des ondes augmente au fur et à mesure que les deux objets se rapprochent, et que la vitesse de propagation augmente avec la fréquence, on s'attend à ce que l'onde se déforme et se "tasse" : le temps d'observation d'un certain nombre de cycles est inférieur au temps mis à les émettre.

On a maintenant toutes les hypothèses et approximations nécessaires pour mener le calcul. On note $m \equiv m_1 + m_2$ la masse totale du système binaire, $\mu \equiv m_1m_2/m$ la masse réduite et $\eta \equiv \mu/m$ le paramètre de la masse réduite. On va s'intéresser à la transformée de Fourier de $h(t)$. En remarquant que l'amplitude varie beaucoup plus lentement que la phase, on peut utiliser l'approximation de la

phase stationnaire⁸ et en notant \tilde{t} le temps tel que $f(\tilde{t}) = \tilde{f}$:

$$\tilde{h}(\tilde{f}) = \frac{A(\tilde{t})}{\sqrt{\dot{f}(\tilde{t})}} e^{i\Psi(\tilde{f})} \quad (9.22)$$

où

$$\Psi(\tilde{f}) = 2\pi\tilde{f}t_c - \Phi_c + 2\pi \int_{f_c}^{\tilde{f}} (t - t_c) df - \frac{\pi}{4} \quad (9.23)$$

On relie ensuite cette onde observée à l'onde émise grâce à (9.17). On rappelle qu'il faut que $\Delta t \equiv t - t_c \ll a/\dot{a}$, qui est toujours vérifiée avec le temps typique d'observation d'un système binaire et les valeurs de l'âge et de la taille de l'Univers actuel (voir le paragraphe 9.2). En se rappelant qu'à cause du redshift $f = (1 + Z)f_e$, on obtient :

$$\Psi(\tilde{f}) = 2\pi\tilde{f}t'_c - \Phi'_c + 2\pi \int_{\tilde{f}_{ec}}^{\tilde{f}_e} (t_e - t_{ec}) df_e - \frac{\pi D}{f_e \lambda_g^2} - \frac{\pi}{4} \quad (9.24)$$

où l'on a noté :

$$t'_c = t_c - \frac{D}{2(1+Z)\lambda_g^2 f_c^2}, \quad \Phi'_c = \Phi_c - 2\pi \frac{D}{(1+Z)\lambda_g^2 f_c^2} \quad (9.25)$$

Les calculs en RG donnent à l'ordre 1,5 PN

$$\frac{df_e}{dt_e} = \frac{96}{5\pi M_e^2} (\pi M_e f_e)^{11/3} \left[1 - \left(\frac{743}{336} + \frac{11}{4}\eta \right) (\pi m f_e)^{2/3} + 4\pi(\pi m f_e) \right] \quad (9.26)$$

qui permet après développement à l'ordre le plus bas et intégration, d'obtenir $t_e - t_{ec}$ en fonction de f_e . $\mathcal{M}_e \equiv \eta^{3/5} m$ est appelée la *chirp masse* de l'émetteur. Après avoir absorbé les constantes d'intégration dans \hat{t}_c et $\hat{\Phi}_c$, on obtient

$$\Psi(\tilde{f}) = 2\pi\tilde{f}\hat{t}_c - \hat{\Phi}_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128}u^{-5/3} - \beta u^{-1} + \frac{5}{96} \left(\frac{743}{336} + \frac{11}{4}\eta \right) \eta^{-2/5} u^{-1} - \frac{3\pi}{8} \eta^{-3/5} u^{-2/3} \quad (9.27)$$

où $u \equiv \pi \mathcal{M} \tilde{f}$ et $\mathcal{M} = (1 + Z)\mathcal{M}_e$ est la chirp masse observée, elle-aussi redshiftée.

La correction due à la masse du graviton apparaît donc sous la forme d'un terme supplémentaire βu^{-1} où

$$\beta \equiv \frac{\pi^2 D \mathcal{M}}{(1 + Z)\lambda_g^2} \quad (9.28)$$

On peut alors proposer une minoration de la longueur de Compton du graviton en utilisant une technique de *matched filtering*. Celle-ci consiste à prendre le signal mesuré au niveau d'un détecteur qui s'écrit

$$s(t) = h(t) + n(t) \quad (9.29)$$

où $h(t)$ est l'onde qui nous intéresse et $n(t)$ est le bruit du détecteur. On fait ensuite passer ce signal à travers un filtre choisi pour supprimer les fréquences où le bruit est le plus important (voir [14] pour

8. La méthode de la phase stationnaire permet d'évaluer le comportement asymptotique d'une intégrale du type :

$$I(\omega) = \int_a^b f(t) e^{i\omega g(t)} dt \quad (9.20)$$

pour $\omega \rightarrow +\infty$. Pour g possédant un unique point stationnaire $a < t_s < b$ et $\sigma = \text{sgn}(g''(t_s))$:

$$I(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega |g''(t_s)|}} f(t_s) e^{i\omega g(t_s)} e^{i\sigma\pi/4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (9.21)$$

une discussion détaillée) $s(t) \rightarrow \int w(t - \tau)s(\tau)d\tau$. Ensuite, on calcule le rapport signal sur bruit S/N pour une onde théorique $\hat{h}(t)$ avec laquelle on veut comparer l'onde détectée :

$$\frac{S}{N}[\hat{h}] = \frac{\int \hat{h}(t)w(t - \tau)s(\tau)d\tau dt}{rms \int \hat{h}(t)w(t - \tau)n(\tau)d\tau dt} \quad (9.30)$$

où l'on a noté rms la moyenne quadratique :

$$rms \Psi = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Psi^2(t)dt \quad (9.31)$$

Le rapport $S/N[\hat{h}]$ sera très petit dès que le signal de l'onde détecté $h(t)$ s'écartera légèrement de l'onde théorique $\hat{h}(t)$ lors de l'évolution en spirale du système. En mesurant précisément les différents paramètres qui interviennent dans l'onde gravitationnelle et en prenant $\hat{h}(t)$ l'onde théorique obtenue dans ce paragraphe avec $\beta = 0$, on s'attend à ce qu'une masse suffisamment grande du graviton induise une différence observable dans ce rapport signal sur bruit.

La mesure de l'onde gravitationnelle émise par un système binaire compact et l'analyse précédente devraient donc permettre d'obtenir une majoration de la masse du graviton. Avec le bruit et les valeurs donnés dans l'article de C. M. Will [15], on trouve pour LIGO-VIRGO $\lambda_g > 10^{12}$ km et pour LISA $\lambda_g > 10^{16}$, ce qui correspond à des masses du graviton $m_g < 10^{-22}$ eV et $m_g < 10^{-26}$ eV.

10 Perspectives

La dernière décennie a vu un renouveau de la gravité massive. Les anciens obstacles théoriques, la discontinuité vDVZ et le fantôme de Boulware-Deser, qui empêchaient jusqu'alors ces théories de devenir des alternatives sérieuses à la RG, ont été partiellement surmontés. Si le mécanisme de Vainshtein est mieux compris et si des théories sans fantôme ont été construites, toutes les pathologies n'ont pas encore été résolues et il reste beaucoup de points problématiques (cosmologie de ces modèles, solution pour un trou noir...). Cependant, il est déjà possible de faire un certain nombre de remarques phénoménologiques, voire même de prédictions dans certains cas (qui à l'image de la discontinuité vDVZ pourraient exclure certains modèles et orienter la recherche). Plusieurs travaux, comme nous l'avons vu, ont déjà proposé des majorations de la masse du graviton en se basant sur le potentiel Yukawa ou sur la relation de dispersion du graviton : ces travaux restent largement insatisfaisants, à défaut de se baser sur une action cohérente et valable sur des distances cosmologiques. Il faudrait pouvoir mener des études se basant sur une théorie saine précise, comme la théorie dRGT, et vérifier ces considérations phénoménologiques, la difficulté principale étant de pouvoir mener les calculs.

Un domaine très prometteur est celui des ondes gravitationnelles où les phénomènes sont très contraints théoriquement par la RG. Le calcul mené dans la dernière section de ce mémoire avait pour but de présenter ce qui se faisait actuellement dans la littérature sur les ondes gravitationnelles. Outre l'hypothèse non démontrée (l'impulsion constante en espace courbe), de nombreux points restent à éclaircir, notamment les approximations qui se basent sur des notions vagues de mécanisme de Vainshtein et potentiel de Yukawa, pour finalement justifier reprendre la forme d'onde de la RG, négligeant ainsi les 3 polarisations supplémentaires. Il faudrait refaire le calcul complet dans le cadre d'une théorie particulière (la dRGT ? dont on a toujours pas montré qu'elle était débarassée dans le cas général de la discontinuité vDVZ).

Malgré la relative faiblesse des travaux menés jusqu'à présent, la mise en place de nouveaux appareils de détection d'ondes gravitationnelles, dont le potentiel interféromètre spatial LISA (voir [24] sur les possibilités ouvertes par le détecteur BBO), devrait permettre de vérifier la RG avec grande précision dans des régimes encore peu explorés, amenant ainsi soit à une confirmation de l'incomplétude de la RG, soit à des contraintes plus fortes sur les théories alternatives (voir [13] pour une revue complète sur le sujet).

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadrante de stage Danièle Steer qui m'a fait découvrir le sujet de la gravité massive, tout en aiguisant avec sa rigueur mon esprit critique, particulièrement à la lecture de nouveaux articles, et David Langlois qui était là pour répondre à mes questions.

Références

- [1] A. G. Riess et al. Supernova Search Team Collaboration. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron.J.*116, pages 1009–1038, May (1998).
- [2] Weinberg S. *The Quantum theory of fields. Vol. 1 : Foundations.* Cambridge UK Univ. Pr., 1995.
- [3] Feynman R. P. *Lecons sur la gravitation.* Odile Jacob, 2007.
- [4] de Rham Claudia. Massive gravity. *Living Rev. in Relativity*, page 186, Mar 2014.
- [5] Kurt Hinterbichler. Theoretical aspects of massive gravity. *Rev.Mod.Phys.*, 84, pages 671–710, 2012.
- [6] Fierz M. et Pauli W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond. A173*, pages 211–232, (1939).
- [7] H. van Dam and M. J. G. Veltman. Massive and massless yang-mills and gravitational fields. *Nucl. Phys. B22*, pages 397–411, (1970).
- [8] Vainshtein A. I. To the problem of nonvanishing gravitation mass. *Phys.Lett. B39*, pages 393–394, (1972).
- [9] Cedric Deffayet Eugeny Babichev. An introduction to the vainshtein mechanism. *Class. Quantum Grav.* 30, page 28, 2013.
- [10] Boulware D. G. et Deser S. Can gravitation have a finite range? *Phys.Rev.*, D6, pages 3368–3382, (1972).
- [11] Gabadadze Gregory de Rham Claudia and Tolley Andrew J. Resummation of massive gravity. *Phys.Rev.Lett.* 106, page 6, Nov 2010.
- [12] R. W. Hellings et E. M. Standish C. Talmadge, J. P. Berthias. Model-independent constraints on possible modifications of newtonian gravity. *Phys.Rev.Lett.* 61, page 1159, Sep 1988.
- [13] Siemens Xavier Yunes Nicolas. Gravitational wave tests of general relativity with ground-based detectors and pulsar timing arrays. *Living Rev. in Relativity*, page 123, Apr 2013.
- [14] Flanagan E. Eanna Cutler Curt. Gravitational waves from merging compact binaries : How accurately can one extract the binary’s parameters from the inspiral waveform ? *Phys.Rev.D* 49, pages 2658–2697, Mar 1994.
- [15] Clifford M. Will. Bounding the mass of the graviton using gravitational wave observations of inspiralling compact binaries. *Phys.Rev.*, D57, pages 2061–2068, (1998).
- [16] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry : an introduction to General Relativity.* University of Chicago, 2004.
- [17] Teitelboim C. Henneaux M. *Quantization of Gauge Systems.* Princeton University Press, 1991.
- [18] Alexei Deriglazov. *Classical Mechanics : Hamiltonian and Lagrangian Formalism.* Springer, 2010.
- [19] Wald R. M. *General Relativity.* Chicago University Press, 1984.
- [20] DeWitt S. Bryce. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys.Rev.* 160, pages 1113–1148, Jul 1966.
- [21] Rombouts Jan-Willen Deffayet Cedric. Ghosts, strong coupling and accidental symmetries in massive gravity. *Phys.Rev.D72*, page 21, May 2005.
- [22] Michele Maggiore. *Gravitational Waves, Volume 1, Theory and Experiments.* Oxford University Press, 2008.
- [23] Tanaka Takahiro Yagi Kent. Constraining alternative theories of gravity by gravitational waves from precessing eccentric compact binaries with lisa. *Phys.Rev.D81*, page 35, Jun 2009.
- [24] Holz E. Daniel Cutler Curt. Ultra-high precision cosmology from gravitational waves. [arXiv :0906.3752 [astro-ph.CO]], Jun 2009.

A Algèbre des contraintes en RG

On rappelle la formule utile suivante donnant la dérivée de Lie d'une densité tensorielle selon un champ de vecteur \underline{f} dans un espace riemanien :

$$\mathcal{L}_{\underline{f}} T^{a\dots}_{b\dots} = f^c \nabla_c T^{a\dots}_{b\dots} - (\nabla_c f^a) T^{c\dots}_{b\dots} + (\nabla_b f^c) T^{a\dots}_{c\dots} + \omega (\nabla_c f^c) T^{a\dots}_{b\dots} \quad (\text{A.1})$$

où ω est le poids de la densité tensorielle $T^{a\dots}_{b\dots}$, et l'expression des 4 contraintes secondaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= h^{-1/2} (\pi^{ij} \pi_{ij} - \pi^2) - h^{1/2} R^{(quad)} \\ \mathcal{H}_i &= -2h_{ik} \pi^{kj}{}_{|j} - (2h_{ij|k} - h_{jk|i}) \pi^{jk} \end{aligned}$$

où l'on a réécrit explicitement la dérivée extérieure. La barre verticale désigne la dérivée covariante $h_{ij|k} = \nabla_k h_{ij}$.

Pour calculer les relations de commutation (4.30) à (4.32), on commence par remarquer que :

$$\begin{aligned} \{h_{ij}(x), \mathcal{H}(\underline{f})\} &\stackrel{IPP}{=} 2 \left\{ h_{ij}(x), \int d^3y (D_l f_k) \pi^{lk} \right\} = D_j f_i + D_i f_j \\ &\equiv \mathcal{L}_{\underline{f}} h_{ij} \\ \{\pi^{ij}(x), \mathcal{H}(\underline{f})\} &\stackrel{IPP}{=} \left\{ \pi^{ij}(x), \int d^3y \left[2\partial_k (f^i \pi^{jk}) h_{ij} - \partial_i (\pi^{jk} f^i) h_{jk} \right] \right\} \\ &= f^k \pi^{ij}{}_{|k} + f^k{}_{|k} \pi^{ij} - f^i{}_{|k} \pi^{jk} - f^j{}_{|k} \pi^{ik} \\ &\equiv \mathcal{L}_{\underline{f}} \pi^{ij} \end{aligned}$$

D'où pour une fonction F quelconque de h_{ij} et π^{ij} , on obtient la relation de commutation suivante :

$$\begin{aligned} \{F[h_{ij}, \pi^{ij}](x), \mathcal{H}(\underline{f})\} &\stackrel{def}{=} \int d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta h_{ij}} \{h_{ij}(x), \mathcal{H}(\underline{f})\} - \frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}} \{\mathcal{H}(\underline{f}), \pi_{ij}(x)\} \right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta h_{ij}} \mathcal{L}_{\underline{f}} h_{ij} + \frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}} \mathcal{L}_{\underline{f}} \pi^{ij} \right] \\ &\equiv \mathcal{L}_{\underline{f}} F \end{aligned}$$

En utilisant cette formule, on peut calculer facilement les deux premiers commutateurs. On remarque que \mathcal{H}_i est par définition une densité tensorielle de poids $\omega = 1$ qu'il faut faire apparaître dans le calcul de sa dérivée de Lie.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(\underline{g}), \mathcal{H}(\underline{f})\} &= \int d^3x g^i(x) \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(\underline{f})\} = \int d^3x g^i(x) \mathcal{L}_{\underline{f}} \mathcal{H}_i(x) \\ &= \int d^3x g^i(x) \left[f^k \nabla_k \mathcal{H}_i + f^k{}_{|i} \mathcal{H}_k + f^k{}_{|k} \mathcal{H}_i \right] \\ &= \int d^3x \mathcal{H}_i \left[g^k f^i{}_{|k} - g^i f^k{}_{|k} - f^k g^i{}_{|k} + g^i f^k{}_{|k} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\{\mathcal{H}(\underline{g}), \mathcal{H}(\underline{f})\} = \mathcal{H} \left(g^k f^i{}_{|k} - f^k g^i{}_{|k} \right)}$$

De même :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(\underline{g}), \mathcal{H}(\underline{f})\} &= \int d^3x f(x) \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(\underline{g})\} = - \int d^3x f(x) \mathcal{L}_{\underline{g}} \mathcal{H}(x) \\ &= - \int d^3x f(x) \left[g^k \nabla_k \mathcal{H} + g^k{}_{|k} \mathcal{H} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\{\mathcal{H}(g), \mathcal{H}(f)\} = \mathcal{H}\left(g^k \nabla_k f\right)}$$

Le dernier commutateur est beaucoup plus difficile à obtenir. Commençons par réécrire la contrainte \mathcal{H} sous la forme plus compacte suivante :

$$\mathcal{H}(x) = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - h^{1/2} R^{(3)} \quad (\text{A.2})$$

avec

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-1/2} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}) \quad (\text{A.3})$$

On va séparer ensuite le commutateur en plusieurs termes symétriques :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g)\} &= \int d^3 x d^3 y f(x) g(y) \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} \\ &= \int d^3 x d^3 y f(x) g(y) \left[\left\{ G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl}(x), G_{mnuv} \pi^{mn} \pi^{uv}(y) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl}(x), -h^{1/2} R^{(3)}(y) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -h^{1/2} R^{(3)}(x), G_{mnuv} \pi^{mn} \pi^{uv}(y) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ h^{1/2} R^{(3)}(x), h^{1/2} R^{(3)}(y) \right\} \right] \end{aligned}$$

Le dernier crochet de Poisson est nul

$$\left\{ h^{1/2} R^{(3)}(x), h^{1/2} R^{(3)}(y) \right\} = 0 \quad (\text{A.4})$$

car $h^{1/2} R^{(3)}$ ne contient pas de moments conjugués π^{ij} et donc son commutateur avec h_{ij} est nul.

Par ailleurs, on voit que le premier crochet se développe en somme de commutateurs des variables canoniques

$$\left\{ G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl}(x), G_{mnuv} \pi^{mn} \pi^{uv}(y) \right\} \propto \{h_{ij}, \pi^{ij}\} = \delta(x - y) \quad (\text{A.5})$$

qui est symétrique en $(x \leftrightarrow y)$. Or les crochets de Poisson sont antisymétriques : ce terme est donc également nul.

Il nous reste donc à calculer :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= \left\{ G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl}(x), -h^{1/2} R^{(3)}(y) \right\} - (x \longleftrightarrow y) \\ &= -2 G_{ijkl}(x) \pi^{kl}(x) \left\{ \pi^{ij}(x), h^{1/2} R^{(3)}(y) \right\} - (x \longleftrightarrow y) \\ &\stackrel{def}{=} 2 G_{ijkl}(x) \pi^{kl}(x) \frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)} \left(h^{1/2}(y) R^{(3)}(y) \right) - (x \longleftrightarrow y) \end{aligned}$$

On peut montrer après un long calcul :

$$\delta \left(h^{1/2} R^{(3)} \right) = h^{1/2} \left(\frac{1}{2} h^{ij} R^{(3)} - R^{(3)ij} \right) \delta h_{ij} + h^{1/2} h^{ij} h^{kl} (\delta h_{ik|jl} - \delta h_{ij|kl})$$

où $h_{ik|jl} = \nabla_j \nabla_l h_{ik}$.

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)} \left(h^{1/2}(y) R^{(3)}(y) \right) &= h^{1/2} \left(\frac{1}{2} h^{ij} R^{(3)} - R^{(3)ij} \right) \delta(x - y) \\ &\quad + h^{1/2} h^{ab}(y) h^{cd}(y) \left[\frac{\delta h_{ac|bd}(y)}{\delta h_{ij}(x)} - \frac{\delta h_{ab|cd}(y)}{\delta h_{ij}(x)} \right] \end{aligned}$$

Par le même argument que précédemment, le premier terme de cette expression ne contribue pas au calcul final par antisymétrie des crochets de Poisson.

Il nous reste donc finalement, après intégration par partie :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g)\} &= \int d^3x d^3y f(x) 2 G_{ijkl}(x) \pi^{kl}(x) \left[\left(g(y) h^{1/2} h^{ab}(y) h^{cd}(y) \right)_{|bd} \delta_{ac}^{ij} \right. \\ &\quad \left. - \left(g(y) h^{1/2} h^{ab}(y) h^{cd}(y) \right)_{|cd} \delta_{ab}^{ij} \right] \delta(x-y) \\ &\quad - \int d^3x d^3y g(y) 2 G_{ijkl}(y) \pi^{kl}(y) \left[\left(f(x) h^{1/2} h^{ab}(x) h^{cd}(x) \right)_{|bd} \delta_{ac}^{ij} \right. \\ &\quad \left. - \left(f(x) h^{1/2} h^{ab}(x) h^{cd}(x) \right)_{|cd} \delta_{ab}^{ij} \right] \delta(x-y) \end{aligned}$$

On rappelle que : $\delta_{ij}^{kl} = (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) / 2$. On utilise maintenant que la dérivée covariante de la métrique est nulle et on intègre selon y :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g)\} &= \int d^3x 2 G_{ijkl} \pi^{kl} \left[f(x) g(x)_{|bd} h^{1/2} h^{ab} h^{cd} \delta_{ac}^{ij} - f(x) g(x)_{|cd} h^{1/2} h^{ab} h^{cd} \delta_{ab}^{ij} \right. \\ &\quad \left. - g(x) f(x)_{|bd} h^{1/2} h^{ab} h^{cd} \delta_{ac}^{ij} + g(x) f(x)_{|cd} h^{1/2} h^{ab} h^{cd} \delta_{ab}^{ij} \right] \\ &= \int d^3x 2 h^{1/2} G_{ijkl} \pi^{kl} \left(h^{ic} h^{jd} - h^{ij} h^{cd} \right) [f g_{|cd} - g f_{|cd}] \end{aligned}$$

En utilisant la formule explicite de G_{ijkl} :

$$\begin{aligned} 2h^{1/2} G_{ijkl} \left(h^{ic} h^{jd} - h^{ij} h^{cd} \right) &= (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}) \left(h^{ic} h^{jd} - h^{ij} h^{cd} \right) \\ &= \delta_k^c \delta_l^d + \delta_l^c \delta_k^d - \delta_j^c h^{jd} h_{kl} - \delta_k^j h^{cd} h_{jl} - \delta_l^j h^{cd} h_{jk} + 3h^{cd} h_{kl} \\ &= 2 \delta_{kl}^{cd} \end{aligned}$$

On peut maintenant finir :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g)\} &= \int d^3x 2 \delta_{kl}^{cd} \pi^{kl} [f g_{|cd} - g f_{|cd}] \\ &= \int d^3x \pi^{kl} (f g_{|kl} + f g_{|lk} - g f_{|kl} - g f_{|lk}) \\ &= 2 \int d^3x \pi^{kl} (f g_{|kl} - g f_{|kl}) \\ &= -2 \int d^3x \left(\left(\pi^{kl} f \right)_{|l} g_{|k} - \left(\pi^{kl} g \right)_{|l} f_{|k} \right) \\ &= -2 \int d^3x \left(\pi^{kl} {}_{|l} f g_{|k} + f {}_{|l} \pi^{kl} g_{|k} - \pi^{kl} {}_{|l} g f_{|k} - g {}_{|l} \pi^{kl} f_{|k} \right) \\ &= -2 \int d^3x \pi^{kl} {}_{|l} (f g_{|k} - g f_{|k}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\{\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g)\} = \mathcal{H} \left(h^{ij} (f g_{|j} - g f_{|j}) \right)}$$

B Calculs des contraintes en gravité massive

On commence par calculer les relations de commutation utiles suivantes :

$$\begin{aligned}
\left\{ \pi^{ij}(x), \int d^3y \mathcal{R}^{quad}(y) \right\} &= -\frac{1}{2} \int d^3y \delta(x-y) \left[\partial_k \partial_k h_{ij} - \partial_i \partial_k h_{ik} - \partial_j \partial_k h_{jk} \right. \\
&\quad \left. + \partial_i \partial_j h + \delta_{ij} (\partial_k \partial_l h_{kl} - \partial_k \partial_k h) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left[\partial_k \partial_k h_{ij} - \partial_i \partial_k h_{ik} - \partial_j \partial_k h_{kj} + \partial_i \partial_j h + \delta_{ij} (\partial_k \partial_l h_{kl} - \partial_k \partial_k h) \right] \\
\left\{ \pi(x), \int d^3y \mathcal{R}^{quad}(y) \right\} &= \delta_{ij} \left\{ \pi_{ij}(x), \int d^3y \mathcal{R}^{quad}(y) \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \int d^3x f(x) \partial_j \pi^{ij}(x), \int d^3y \mathcal{R}^{quad}(y) \right\} &\stackrel{IPP}{=} - \int d^3x \partial_j f(x) \left\{ \pi^{ij}(x), \int d^3y \mathcal{R}^{quad}(y) \right\} \\
&\stackrel{IPP}{=} -\frac{1}{2} \int d^3x f(x) \left[\partial_j \partial_k \partial_k h_{ij} - \partial_j \partial_i \partial_k h_{ik} - \partial_j \partial_j \partial_k h_{jk} \right. \\
&\quad \left. + \partial_j \partial_i \partial_j h + \partial_i \partial_k \partial_l h_{kl} - \partial_i \partial_k \partial_k h \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

On utilise ensuite ces résultats pour calculer (où l'on a noté $\hat{\mathcal{H}}_T(y)$ la densité de l'Hamiltonien total) :

$$\begin{aligned}
\left\{ h_{ij}(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} &= \left\{ h_{ij}(x), \int d^3y \left[\pi^{kl} \pi_{kl} - \frac{1}{2} \pi^2 + \pi^{kl} \partial_l N_k \right] \right\} \\
&= 2\pi_{ij} - \delta_{ij} \pi + 2\partial_j N_i \\
\left\{ \pi_{ij}(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} &= - \left\{ \pi_{ij}(x), \int d^3y \mathcal{R}^{quad}(y) \right\} \\
&\quad + \left\{ \pi_{ij}(x), \int d^3y \left[(\partial_k \partial_k n) h - (\partial_k \partial_l n) h_{kl} - nm^2 h + \frac{m^2}{4} (h_{kl} h_{kl} - h^2) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\partial_k \partial_k h_{ij} - \partial_i \partial_k h_{ik} - \partial_j \partial_k h_{kj} + \partial_i \partial_j h + \delta_{ij} (\partial_k \partial_l h_{kl} - \partial_k \partial_k h) \right] \\
&\quad + \partial_i \partial_j n - \frac{m^2}{2} h_{ij} + \delta_{ij} \left(\frac{m^2}{2} h + nm^2 - \partial_k \partial_k n \right)
\end{aligned}$$

On peut alors calculer la contrainte tertiaire à partir de la conservation dans le temps de la contrainte Φ_4 :

$$\begin{aligned}
\left\{ \int d^3x f(x) \Phi_4(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} &= \left\{ \int d^3x f(x) \partial_k \partial_k h, \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} \\
&\quad - \left\{ \int d^3x f(x) \partial_k \partial_l h_{kl}, \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} \\
&\quad - m^2 \left\{ \int d^3x f(x) h, \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} \\
&= (1) - (2) - m^2 (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) & \stackrel{IPP}{=} \left\{ \int d^3x (\partial_k \partial_k f(x)) h(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} = \int d^3x (\partial_k \partial_k f(x)) \delta_{ij} \left\{ h_{ij}(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} \\
& \stackrel{IPP}{=} \int d^3x f(x) \left[-\partial_k \partial_k \pi + 2\partial_k \partial_k \partial_i N_i \right] \\
(2) & \stackrel{IPP}{=} \left\{ \int d^3x (\partial_i \partial_j f(x)) h_{ij}(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} = \int d^3x (\partial_i \partial_j f(x)) \left\{ h_{ij}(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} \\
& \stackrel{IPP}{=} \int d^3x f(x) \left[2\partial_i \partial_j \pi_{ij} - \partial_k \partial_k \pi + 2\partial_j \partial_i \partial_i N_j \right] \\
(3) & = \int d^3x f(x) \delta_{ij} \left\{ h_{ij}(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} = \int d^3x f(x) \left[-\pi + 2\partial_i N_i \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \int d^3x f(x) \Phi_4(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} & = \int d^3x f(x) \left[-2\partial_k \partial_l \pi^{kl} + m^2 \pi - 2m^2 \partial_i N_i \right] \\
& = \int d^3x f(x) \left[\left(2\partial_k \partial_l \pi^{kl} + m^2 \pi + 2\partial_i \Phi_{4+i} \right) \right]
\end{aligned}$$

On trouve donc la contrainte tertiaire $\Phi_8 \equiv 2\partial_k \partial_l \pi^{kl} + m^2 \pi \approx 0$. Les contraintes Φ_{4+i} contraignent ensuite les multiplicateurs de Lagrange et ne propagent pas de nouvelles contraintes.

$$\begin{aligned}
\left\{ \int d^3x f(x) \Phi_8(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} & = 2 \left\{ \int d^3x f(x) \partial_i \partial_j \pi^{ij}, \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} \\
& \quad + m^2 \left\{ \int d^3x f(x) \pi, \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} \\
& = 2(1) + m^2(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) & \stackrel{IPP}{=} \left\{ \int d^3x (\partial_i \partial_j f(x)) \pi_{ij}(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} = \int d^3x \partial_i \partial_j f(x) \left\{ \pi^{ij}(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} \\
& \stackrel{IPP}{=} \int d^3x f(x) \left[\partial_i \partial_i \partial_j \partial_j n + \frac{m^2}{2} (\partial_i \partial_i h - \partial_i \partial_j h_{ij}) + m^2 \partial_i \partial_i n - \partial_k \partial_k \partial_i \partial_i n \right] \\
(2) & = \int d^3x f(x) \delta_{ij} \left\{ \pi^{ij}(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} \\
& = \int d^3x f(x) \left[\frac{1}{2} (\partial_i \partial_j h_{ij} - \partial_i \partial_i h) - 2\partial_i \partial_i n + m^2 h + 3nm^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \int d^3x f(x) \Phi_8(x), \int d^3y \hat{\mathcal{H}}_T(y) \right\} & = \int d^3x f(x) \left[3nm^4 + m^4 h + \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j h_{ij} - \partial_i \partial_i h) \right] \\
& = 3m^4 (n + 2h) + \frac{1}{2} m^2 \Phi_4
\end{aligned}$$

On a ainsi trouvé la contrainte quaternaire $\Phi_9 \equiv 2h + n$. Celle-ci ne se propage pas car elle contraint le multiplicateur de Lagrange devant π_n .